

普通高等教育“十一五”国家级规划教材



测绘科技专著出版基金资助

CEHUI KEJI ZHUANZHU CHUBAN JIJIN ZIZHU

大地测量学基础

Foundation of Geodesy

吕志平　乔书波　编著



测绘出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

- 空间信息导论
- 数字工程的原理与方法
- 地球信息科学导论
- 摄影测量与遥感概论（第二版）
- 摄影测量学
- 数字摄影测量学
- 高光谱遥感
- 现代测量学
- 测量学实验与实习
- 大地测量学基础
- 大地测量学基础(双语教学英文版)
- 现代大地控制测量（第二版）
- 高等测量平差
- 误差理论与测量平差基础
- 近代测量数据处理与应用
- 地籍测量（第二版）
- 工业测量系统原理与应用
- 地图设计与编绘
- 建筑构造
- 建筑结构与选型

（ 是已出的书，蓝色是当前书）



ISBN 978-7-5030-2011-7

GS(2009)1737号 定价:28.00元

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
测绘科技专著出版基金资助

大地测量学基础

Foundation of Geodesy

吕志平　乔书波　编著

测绘出版社
·北京·

内容提要

本书系统而全面地讨论了测绘基准与大地控制网、大地水准面与高程系统、参考椭球面与大地坐标系、高斯投影与高斯平面坐标系、大地坐标系的建立等测绘学的基本问题,介绍了与之相关的各类大地测量数据采集技术。

本书可作为高等院校测绘类各专业本科生的通用教材,对于从事与测绘工程有关的技术人员也是一本值得推荐的基础性参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大地测量学基础/吕志平,乔书波编著. —北京:测绘出版社,2010.3

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

ISBN 978-7-5030-2011-7

Ⅰ. 大…　Ⅱ. ①吕…②乔…　Ⅲ. 大地测量学—高等学校—教材　Ⅳ. P22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 015183 号

责任编辑　田　力　　**封面设计**　李　伟　　**责任校对**　董玉珍　李　艳

出版发行　测绘出版社

社　　址　北京西城区三里河路 50 号　　**电　　话**　010—68531160(营销)

邮政编码　100045　　010—68531609(门市)

电子信箱　smp@sinomaps.com　　**网　　址**　www.sinomaps.com

印　　刷　北京金吉士印刷有限责任公司　　**经　　销**　新华书店

成品规格　184mm×260mm

印　　张　13.5　　**字　　数**　336 千字

版　　次　2010 年 3 月第 1 版　　**印　　次**　2010 年 3 月第 1 次印刷

印　　数　0001—3000　　**定　　价**　28.00 元

书　　号　ISBN 978-7-5030-2011-7/P·462

审 图 号　GS(2009)1737 号

前 言

测绘基准和测绘系统是测绘学科的基础性问题，在测绘工程中具有十分重要的地位和作用。测绘基准是指进行测绘工作的各类起算面、起算点及其相关的参数，包括大地基准(即坐标基准)、高程基准、深度基准、重力基准等，它们是国家测绘工作的起算依据，是建立各个测绘系统的基础；测绘系统是指通过布设全国范围的各类大地控制网而实现的各类基准的延伸，包括大地坐标系统、平面坐标系统、高程系统、地心坐标系统和重力测量系统等，它们是各类测绘成果的依据。

测绘基准和测绘系统的设立、使用是否科学、完善，直接关系到国家测绘成果的精确度和实用性，我国 1959 年发布的《中华人民共和国大地测量法式》和 1992 年发布的《中华人民共和国测绘法》，都明确规定了我国统一的测绘基准和测绘系统的法律地位和技术原则。

作为测绘工程各专业的专业基础课程，本书以测绘基准和测绘系统为主线，以后续专业课程的需要和工程实际应用为主导，结合大地测量学科的当前进展，在我院几代人的教学实践和编著者多年教学经验的基础上编写完成。其中，第一章介绍了大地测量学的任务、作用和发展简史；第二章概括介绍了各类大地测量技术和方法，第三、四、五、六、七章详细讨论了测绘基准与大地控制网、大地水准面与高程系统、参考椭球面与大地坐标系、高斯投影与高斯平面直角坐标系以及大地坐标系的建立等问题。本书是理解和掌握测绘学科各专业课程的基础教材。

在本书的编写过程中，我们首先重视教材新体系的构筑，力求避免原有多门课程知识的简单拼凑，按照 21 世纪人才培养对大地测量学基本知识的要求，针对大学本科生的已有知识基础，明确教材主旨，合理选取教材内容，贯彻“少而精”的方针。本书并不完全遵循已有的专业课程体系，也不受限于以往的课程设置范式。

大学专业基础教材与适当介绍学术热点、学术前沿之间似乎存在一定的矛盾，但恰好可以成为激励学生热情并融科学性、趣味性于一炉的画龙点睛之处。因此，本书在重视教材内容的经典性和完整性的同时，也酌情安排了一些关于学科新进展的窗口，以利于开拓学生的视野和思路，并作为测绘工程后续专业课程的接口。

本书第一、四、五、七章由吕志平编写，第二、三、六章由乔书波编写，全书由吕志平统稿，书中插图由乔书波组织绘制。张建军教授、柴洪洲教授审阅了全书。

在本书完稿之际，要特别感谢我院朱华统教授、熊介教授、黄继文教授、徐正扬教授等前辈在课程建设方面长期不懈的努力，他们虽未直接参与本书的编写，但他们为我们留下的丰富教学成果和形成的我院富有特色的课程教学体系是本书得以顺利完成的前提。感谢教研室张建军、柴洪洲两任主任对课程建设的领导和支持。感谢课程组其他成员的努力和协作，他们是：刘长建、马高峰、赵冬青、李健、张西光等，课程建设成果是集体智慧的结晶。

我院“大地测量学基础”课程的建设，2003～2004 年列入军队院校“2110 工程”课程建设项目，2008～2009 年列入军队院校“2110 工程(二期)”课程建设项目。2008 年，我院“大地测量

学基础"课程被教育部评为国家精品课程,教学资源已在互联网上共享,网址是:http://www.chxy.org。

课程建设是一项长期的任务,欢迎广大读者就本书的体系和内容给予批评指正,以推进本课程建设的不断发展。

作者
于解放军信息工程大学测绘学院
2009年5月

目　录

第一章 绪 论

大地测量学是测绘学和地球科学的分支学科。现代科学技术的成就，导致大地测量学经历了跨时代的革命性转变，突破了传统经典大地测量学的时空局限，进入了以空间大地测量为主的现代大地测量学的发展新阶段。本章简要介绍大地测量学的学科任务、作用以及发展简史与趋势等。

§1-1 大地测量学的任务与学科分类

一、大地测量学的任务与学科性质

大地测量学的任务，一是精确确定地面点位及其变化，二是研究地球重力场、地球形状和大小、地球动力学现象。通常把前者称为大地测量学的技术任务，把后者称为大地测量学的科学任务，二者密切相关。

从学科性质看，大地测量学既是一门应用性学科，又是一门基础性学科。一方面，大地测量学作为一门应用性学科，是测绘学（又称地理空间信息学）的一个分支学科。测绘学的主要研究对象是地球及其表面的各种形态，为此，首先要研究和测定地球的形状、大小及其重力场，并在此基础上建立一个统一的坐标系统，用以表示地表任一点在地球上的准确几何位置，所以人们常把大地测量称为测制地形图的“第一道工序”。另一方面，大地测量学作为一门基础性学科，又是地球物理学的一个分支学科。地球物理学的研究对象是地球的运动、状态、组成、作用力和各种物理过程。对此，大地测量提供的高精度、高分辨率、适时、动态和定量的空间信息，是研究地球自转、地壳运动、海平面变化、地质灾害预测等地球动力学现象的重要手段之一。

二、大地测量学的学科分类

大地测量学按所研究的地球空间的范围大小，可分为高等测量学（理论大地测量学）、大地控制测量学、海洋大地测量学和工程大地测量学。高等测量学是以整个地球形体为研究对象，整体地确定地球形状及其外部重力场，建立大地测量参考系。大地控制测量是在一个或几个国家范围内，在适当选定的参考坐标系中，测定一批足够数量的地面点的坐标和高程，建立国家统一的大地控制网，以满足地形图测绘和工程建设的需要。海洋大地测量是在海洋范围内布设大地控制网，实现海面和水下定位，测定海洋重力场、海面地形和海洋大地水准面等。工程大地测量是在一个局部小范围内测定地球表面的细部，通常以水平面作为参考面。高等测量学、大地控制测量学、海洋大地测量学和工程大地测量学之间存在着密切的联系。国家大地控制测量和海洋大地测量需要全球大地测量所确定的大地测量常数和参考基准，以便对观测结果进行顾及地球曲率和重力场影响的归算。而国家大地控制测量和海洋大地测量的结果又为理论大地测量学提供地球表面的几何和物理量度信息。平面测量必须与国家大地控制网相

连接，以使其成果纳入国家统一的坐标系中。

大地测量学按所研究的地球的时空属性，可分为几何大地测量学、物理大地测量学、动力大地测量学和整体大地测量学。几何大地测量学是用几何方法研究地球的形状和大小，将地面大地控制网投影到规则的参考椭球面上，并以此为基础推算地面点的几何位置。物理大地测量学是研究全球或局部范围内的地球外部重力场，用物理方法建立地球形状理论，并用重力测量数据研究大地水准面相对于地球椭球的起伏。动力大地测量学是通过精确测定地面点的位置和地球重力场随时间的变化，研究地球的整体和局部运动，并作出物理解释。整体大地测量学是将几何和物理空间统一起来，在时间空间参考系中，将大地测量学的一切几何观测量和物理观测量放在一个统一的数学模型中处理。

大地测量学按实现基本任务的技术手段，可分为地面大地测量学（常规大地测量学，又称天文大地测量学）、空间大地测量学（卫星大地测量学）和惯性大地测量学。地面大地测量是应用光电仪器进行短距离（一般小于 50 km）地面几何测量（边角测量、水准测量、大地天文测量）和地面重力测量，以间接的方式确定地面点的水平位置和高程，并求解局部重力场参数。空间大地测量是通过观测地外目标（人造地球卫星、类星体射电源等）来实现地面点的定位，包括相对定位和相对地心的绝对定位，应用卫星重力技术获取全球覆盖的重力场信息。惯性大地测量是利用运动物体的惯性力学原理进行地面点的相对定位，并测定重力场参数。

当前，大地测量学正处在技术革命的历史转变过程，学科的内涵也随之有新的扩展。以空间大地测量为主体的新的大地测量技术体系已经形成，这一新的技术体系能比旧的体系提供更为精密且更为丰富的大地测量信息，这不仅扩大了大地测量在经济和社会发展中的应用领域，提高了效能，也大大加强了它的科学性，提高了作为地球科学中的基础性学科的地位。

§1-2　大地测量的作用

大地测量在国家经济建设、国防建设、地学研究和社会信息化进程中具有重要的作用，以下简述之。

一、大地测量在地形图测绘、工程建设和交通运输方面的作用

在地形图测绘工作中，大地控制网的重要作用主要体现在以下方面：

(1)控制测图误差的积累。在测图工作中难免存在误差，例如描绘一条方向线、量一段距离等都会存在误差，这些误差在小范围内是不明显的，但在大面积测图中将逐渐传递和积累起来，使地形、地物在图上的位置产生较大偏差。如果以大地网作为测图控制基础，就能把误差限制在相邻控制点之间而不致积累传播，从而保证了成图的精度。

(2)统一坐标系统。国家基本地形图通常是不同部门在不同时期、不同地区分幅测绘的。由于大地控制网点的坐标系统是全国统一的，精度均匀，因此不管在任何地区任何时间开展测图工作都不会出现漏测或重叠，从而保证了相邻图幅的良好拼接，形成统一整体。

(3)解决椭球面和平面的矛盾。地图是平面的，但地球接近于旋转椭球体，其表面是不可展平的曲面，如强制展平将会出现皱褶或破裂。也就是说，不能直接把球面上的地形测绘在平面图上。但是，大地控制点在椭球面上的位置通过一定的数学方法可以化算为投影平面上的位置，根据这些平面点位就能控制在平面上测绘地图了。

因此，测绘地形图首先要布设一定密度的大地控制点。传统大地测量作业效率低、周期长、劳动强度大、投资高，随着我国经济的高速发展，对各类中、大比例尺地图的需求迅速增长，要求有快速精密定位和快速测图技术的保障。现在全球定位系统（GPS）定位能以 5～10 min 的时间（传统方法需要几小时到几天）和厘米级精度测定一个点位；GPS 用于航空摄影和地面自动测图系统，可以解决快速大比例尺成图问题。

在工程建设中，大地测量的重要作用主要体现在以下方面：

（1）在工程设计阶段建立用于测绘大比例尺地形图的测图控制网。设计人员是在大比例尺地形图上进行建筑物设计或区域规划的，大地测量的任务是布设作为图根控制依据的测图控制网。

（2）在工程施工阶段建立施工控制网。施工测量的主要任务是将图纸上设计的建筑物放样到实地，并使各建筑物按照设计的位置修建。对于不同的工程，施工测量的具体任务是不同的。例如，隧道施工测量的主要任务是保证对向开挖的隧道能按照规定的精度贯通。放样过程中，仪器所安置的方向、距离都是依据控制网计算出来的，因而在施工放样前，需建立具有必要精度的施工控制网。

（3）在工程竣工后的运营阶段建立以监测建筑物变形为目的的变形观测专用控制网。由于在工程施工阶段改变了地面的原有状态，加之建筑物本身的重量将会引起地基及其周围地层的不均匀变化（变性）。此外，建筑物本身及其基础，也会由于地基的变化而产生变形。这种变形，如果超过了某一限度，就会影响建筑物的正常使用，严重的还会危及建筑物的安全。在一些大城市（如我国的上海、天津），由于地下水的过量开采，会引起市区大范围的地面沉降，从而造成危害。因此，在竣工后的运营阶段，需对这种有怀疑的建筑物或市区进行变形监测，为此需布设高精度的变形观测控制网。

在交通运输方面，大地测量与定位技术为提高交通效率、减少交通事故提供了重要保障。

在古代，中国发明的指南针、古代天文学家创造的天文导航方法开创了人类航运史，导致了美洲新大陆的发现；丝绸之路带来了唐代欧亚贸易，促进了经济繁荣。古老的大地定位技术推动了人类社会文明的发展。

交通运输对定位信息的需求量、种类、质量和实时性要求的程度取决于社会生产、经济和科技发展的水平。古代交通工具的导航定位水平是几公里到几十公里，而今天的海运和空运导航定位水平是几米到几十米。现在 GPS 导航装置能提供分米级甚至厘米级精度的实时导航，这对起降频繁的大型机场来说十分重要。目前我国公路汽车流量猛增，据统计，近年我国公路交通事故的原因大都与驾驶员不能实时确定车位和车距以及缺乏超过障碍的快速反应能力有关。目前，GPS 汽车自动定位显示和反应系统可望普及，这一导航设备将可有效地控制汽车交通事故的发生。内河航运在狭窄的航道和港区避免撞船事故也需要这类装置。高效高精度的卫星导航和定位能力，为大幅度减少交通事故，提高交通运输效率提供了重要保障。

二、大地测量在空间技术和国防建设中的作用

航天器（卫星、导弹、航天飞机和行星际宇宙探测器等）的发射、制导、跟踪、遥控以至返回都需要两类基本的大地测量保障：一是精密的大地坐标系以及地面点（如发射点和跟踪站）在该坐标系中的精确点位；二是精密的全球重力场模型和地面点的准确重力场参数（重力加速度、垂线偏差等）。

大地坐标系用于描述航天器相对于地球体的运动，由分布于地球表面一定数量的已知精确地心坐标的基准点实现，大地坐标系的建立包括确定其坐标轴的定向和一个由 4 个基本参数（a、J_2、ω、GM）定义的正常地球椭球。在航天工程中，通过由测控站（含测控船）组成的航天测控网来确定航天器的运动状态（轨道、姿态）和工作状态，对航天器运动状态进行控制、校正并建立航天器的正常状态，对航天器在运行状态下进行长期管理等。测控站在大地坐标系中的精密位置由大地测量方法精确测定，实施测控作业时，通过测定测控站至航天器的径向距离、距离变化率、位置角等，由已知站坐标解算航天器的位置。

重力场模型提供分析、描述和设计地球表面及其外空间一切运动物体力学行为的先验重力场约束。卫星的精密定轨依赖于在其定轨动力学方程中给定的扰动重力位展开系数的准确程度，低阶地球重力场模型可保证低轨卫星分米级的定轨精度。随着行星际探测技术的发展，产生了空间微重力学这门边缘学科，研究宇宙飞船上试验物的微重力效应，高精度的地球重力场模型将提供主要依据。

洲际导弹是当今主要战略武器，射程在 7 000 km 以上，要求命中精度为几十米，影响落点精度的主要因素是扰动重力场，包括扰动重力和垂线偏差。扰动引力对 1～1.5 万公里射程可产生 1～2 km 落点偏差；对 3 000～5 000 km 的中远程导弹可产生 200～500 m 的落点偏差。发射点垂线偏差在这一射程上也可产生 1 km 左右的落点偏差。不论在导弹的主动段（火箭推动段）和被动段（弹头离箭段）都必须给制导系统输入扰动重力场参数以校正对预定弹道的偏离，这需要依靠制导计算机中存入的重力场模型来实现。确定发射方位角也很重要，$5''$的方位偏差对 1 万公里射程可产生约 200 m 落点偏差，故需要精确的方位角来限制这一误差。

军事大地测量还为中近程导弹阵地、巡航导弹阵地、炮兵阵地、雷达阵地、机场、港口、边防、海防、重要城市等重点军事地区和军事设施的联测建立基础控制网点，并为这些应用场合提供地球重力场数字模型和坐标转换模型。

当前，军事测绘在高技术战争中已直接参与指挥与决策，在指挥、控制、通信和情报系统（C^3I 系统）中，军事大地测量与卫星定位技术系统和成果，如单兵定位系统、GPS 制导系统、打击目标的精确三维坐标等起到了特殊作用，该系统的指挥、控制和决策功能必须要以实时定位信息为依托。例如，指挥官要在电子地图上选定打击目标，分配空中火力，制定参战飞机攻击系列来指挥空战行动，从统帅部指挥控制系统的大屏幕上到各指挥中心的荧光屏上都显示着真实、准确、生动的电子地图与叠加各种军事情况标号的作战要图，在数字地形信息数据库的支撑下建立起陆海空天电一体战的链路网络，保障指挥部与各参战部队之间指挥与控制信息畅通，等等。

从古代战争到现代战争，都需要相应的军事大地测量保障，在高技术条件下，军事大地测量与卫星定位的作用将更显得突出。大地测量从来就同军事结有不解之缘，由此也形成了大地测量信息的保密体制。

三、大地测量在地球科学研究中的作用

地球科学的众多分支都是从各自不同的侧面，应用不同的手段去观测揭示地球系统的组成、运动和发展。大地测量着重于研究地球的几何（空间）特征和最基本的物理特征——重力场，并描述其变化。20 世纪 60 年代后期提出的板块构造学说导致了地球科学的革命性进展，其重大意义在于地球科学从此确立了“活动论”的科学观。现代大地测量学的进展，空间大地

测量手段的引入,对推动地球科学发展的重要意义正是由于大地测量已能广泛地获取地球活动的信息,从而使大地测量能在更深的层次上加强在地球科学中的基础性地位,现代大地测量技术已成为支持“活动论”研究方向的强有力工具,能为当代地球科学研究提供更丰富、更准确的信息。现代大地测量的贡献主要有以下几个方面:

(1)为研究板块运动、地壳形变提供精密的大地测量信息,使建立精确的板块运动、地壳形变定量化模型有了新的手段。甚长基线干涉测量(VLBI)、卫星激光测距(SLR)和 GPS 能以大致 1 毫米/年的速度测定精度测定板块相对运动速度,从而由实测数据直接计算板块相对运动的欧拉向量。过去 20 年已由大地测量技术获得了板块运动的大量数据,检验了由地质数据导出的现代板块运动模型 NUVEL-1 的正确性,并建立了实测模型。目前大地测量正以前所未有的空间和时间分辨率测定全球、区域和局部地壳运动,据此可建立板块内部应力和应变的模型,以检验刚性板块假说的真实程度,推算板块内部形变量,为解释板块内的断裂作用、地震活动及其他构造过程提供依据。目前有些地质和构造事实还不能用板块学说解释,这一学说还要发展完善,大地测量将有可能对此作出新贡献。

(2)极移和地球自转速率的变化包含了地球构造和多种地球动力学过程的信息,空间大地测量测定地球自转参数的精密性已成为提取分辨这些信息最有效的工具。根据一定的地球构造模型(圈层结构假定、地幔地核的弹性和黏弹性假定等),可以建立相应的自转运动方程,由此可研究地球三轴(自转轴、形状轴和动量矩轴)的岁差、章动和极移,将观测值和理论推算值进行比较可以检验和修正地球构造模型,VLBI 观测资料对 IAU1980 章动系列提出的改正推动了重新研究地球模型就是一例。极移包括由地球弹性决定的 410～440 天周期的自由摆动(张德勒摆动)和叠加其上的一年周期的受迫摆动,还有近一日的微小摆动(包括自由摆动和受迫摆动两项),还观测到 25～30 年的长周期低幅摆动。这些不同周期摆动的激发因素是近代地球物理学着重研究的课题,涉及固体地球、大气、海洋和地核之间的角动量转换,潮汐摩擦耗散,气候季节性变化引起的旋转角动量变化,核幔粘弹结构,外液核磁流体动力学(地磁发电机)和核幔电磁耦合等一系列重大问题。日长变化的激励因素被认为与极移摆动大致一致。上述这些问题在地球物理学中还有不少不清楚的方面和争论。现在大地测量已制定实施了多个分布全球的地球自转监测计划,积累了大量的观测资料,结合更多的地球物理、气象和海洋学等资料,通过精密分析,可望获得上述地球结构和动力学问题的新认识,并可能有新的突破。

(3)通过一系列的卫星重力测量计划和陆地、海洋的更大规模重力测量,将提供更精细的地球重力场,这一大地测量成果也将对解决地球构造和动力学问题提供重要的分析资料。

(4)应用空间大地测量技术(特别是卫星海洋测高)可以高精度监测海面变化并确定海面地形及其变化,这些信息可用于研究地球变暖问题、大气环流和海洋环流等气象学和海洋学问题。

地球作为一个动态系统,存在着极其复杂的各类动力学过程,大地测量学以其本身独特的理论体系和测量手段,提供了有关动力学过程各种时空尺度上定量和定性的信息,联合其他有关地学学科,共同提示其本质。也可以说,大地测量对地球科学的贡献,可以归结为下列两个极其基本的方面:一是提供地球对于已知力的响应的度量;二是提供求解作用于地球的力的约束。

四、大地测量在资源开发、环境监测与保护中的作用

资源开发,特别是能源开发是当前经济高速发展的紧迫问题。不论是陆地还是海洋资源勘探,各种比例尺的地形图和精密的重力资料是必不可少的基础资料。例如,20 世纪 80 年代

初在我国西北地区柴达木盆地建立的多普勒卫星网以及在该地区进行的重力测量对这一大油田的勘探、开发提供了精密大地测量数据。对海底大陆架油气田的勘探和开发,大地测量显得更为重要。由卫星雷达测高资料结合近海船舶重力测量,联合沿海验潮站之间的水准测量可以给出近海海域具有较高精度和分辨率的海洋大地水准面和海面地形以及重力异常图;应用海面无线电定位,特别是 GPS 海洋定位,联合声呐海底定位可建立海洋三维大地测量控制网,测制大比例尺海底地形图。海洋大地测量资料结合海洋磁测,钻探岩层采样标本等海洋地球物理探测资料可判明估测海底油气构造和储量;海洋大地测量资料还可以为准确确定钻井井位、海上和水下作业、钻井平台的定位(或复位)、海底管道敷设、水下探测器的安置或回收等提供设计施工依据。卫星定位技术的实时、快速、精确的特点可以为资源勘探与开采中的动态信息管理、生产指挥决策和安全可靠运行提供必要保障。大地测量贯穿资源开发从探测到开采的全过程,先进的大地测量技术将为我国勘探开发矿产资源,特别是向海洋索取能源发挥重要作用。

地球温室效应以及海洋和大气污染是当今世人关注的全球性环境问题。像我国这样的发展中国家还存在地区性环境恶化问题,如森林覆盖面积缩小、草原退化等生态失衡引起的水土流失、沙漠化等;能源结构中煤炭比重过高引起的工业城市大气含尘量高、酸雨频繁出现等;由工业废弃物排放失控引起的大范围水体污染等。环境恶化不仅危及人类生存条件和生活质量,也是经济发展的严重制约因素。地球温室效应的影响已引起各国科学家的普遍重视,这一问题被列为 1992 年世界环境与发展问题大会重要议题就是一个例证。温室效应将引起极地冰盖厚度变薄和全球海水密度减低海平面上升,按现在的估测值每年 0.5～1.5 mm 上升速度,几十年后造成的海岸回退、陆地减少和海水侵入使土地碱化等环境变化将严重危及海岸地区居民的生存条件,太平洋一些岛屿将被海水淹没。认真对待的战略就是精密监测这一过程,控制这一过程的人为因素(如降低二氧化碳排放量、禁止滥伐森林等)。监测这一全球变化的最有效手段是空间大地测量,主要方法是利用 GPS 将全球验潮站联测到 VLBI 和 SLR 站上,以便在精确的大地坐标系中根据长期监测结果分析海面变化。近期实施的卫星重力梯度计划可监测到极地冰融产生的重力变化,同样预计实施的空基卫星激光测距系统有可能直接观测到极地冰盖厚度的变化。

当今世界各国都认识到在发展经济的同时必须同时采取保护环境的对策。环境问题是一个全球性问题,巴西亚马孙河流域热带雨林和东南亚地区热带雨林的日益萎缩,非洲原始森林的破坏,一些地区沙漠化的蔓延都将严重影响全球气候、造成大的水旱灾害。为此必须建立一个全球性的环境监测系统,各个国家也应有一个完善的监测系统,主要措施是发展遥感卫星,建立动态地理信息系统(GIS),对环境变化定期做出准确的定量评估。发展这种监测系统也需要大地测量的支持,发射近地卫星需要精密的地球重力场模型,发射站和跟踪站需要有准确的地心坐标,建立地理信息系统也需要有点位和控制信息,尽管大地测量在这个系统中的作用是间接的,但却是重要和不可缺少的。

五、大地测量在防灾、减灾和救灾中的作用

各种自然灾害,特别是地震、洪水和强热带风暴常给人类带来巨大的破坏和损失。就我国而论,国家有关部门估计单地质灾害年损失为 274 亿元,在灾害频发的年代,各种自然灾害造成的损失高达国民生产总值的 1/6。因此,世界各国都十分注意防灾、抗灾问题。目前除了热

带风暴基本上能准确预报外,大地震成功预防率只有 20%,反映了科学对地球的认识还很肤浅。提高人类预防和避免自然灾害的能力还要作长期的努力。防灾、抗灾、减灾是包括大地测量学在内的地球科学的重要任务。

现代大地测量技术,特别是空间大地测量将在地震灾害的监测和预报研究中发挥越来越重要的作用。地震大多数分布在板块消减带及板内活动断裂带,根据地震的历史记载统计,一个地震带的地震活动有一定的周期性。现在已经辨认出西北太平洋板块消减带史前大地震的地质证据,地壳应变的大地测量结果与两次地震间的弹性应变积累一致,支持了地震有重复周期的观点,重复周期的物理学根据是弹性回跳理论,这也是用大地测量方法长期监测地震带地壳应变活动能为地震的中短期预报提供信息的理论根据。大地测量可以监测震前、同震、震后应变积累和释放的全过程,结合钻孔应变仪、台站伸缩仪和蠕变仪等地球物理监测结果,有可能建立发震前兆模式。1975 年海城短期地震预测的成功,就是利用了明显的短期地震前兆。地震与全球板块运动有关,当相对运动速率明显偏离了长期运动平均速率,表明板块边界带应变积累超常,有孕震的可能。现在一些国家,如美国和日本都在地震带建立了密集的大地测量形变监测系统,包括 GPS、VLBI 和 SLR 站,美国在圣安德烈斯断层带部署了 GPS 自动监测网。今后,随着监测数据的积累和完善,地震预报理论和实践可望有新的突破。

大地测量在预防其他地质灾害中同样发挥着重要作用,例如监测滑坡和泥石流等,1986 年用大地测量监测方法准确地预测了长江新滩附近的严重滑坡,防止了居民的伤亡,减轻了损失。

厄尔尼诺现象是另一种影响大、持续时间长的灾变,它是由于海水温度分布和大洋环流的异常,通过海洋和大气的相互作用造成大气圈质量分布的异常变化,致使地球一部分地区发生雨涝和洪水,另一部分地区则出现干旱。由于角动量交换,大气质量分布的变化使地球角动量变化,影响地球自转速度。1982～1983 年厄尔尼诺现象开始时,地球自转速度急剧放慢,现在应用 VLBI 和 SLR 技术可精确测定地球转速的变化,使提前几年(如 3 年)预测这一灾害现象成为可能。

世界上每年都会发生各种灾难事件,空难、沉船、陆上交通事故、人员在恶劣环境下被困失踪等。如何及时进行有效救援历来引起人们的重视,过去是用无线电 SOS 信号呼救,但往往因为不能准确判断出事地点位置,影响了救援时效,现在国际上已建立了卫星救援系统,关键是利用 GPS 快速定位和卫星通信技术,使国际救援组织能迅速判明出事地点及时组织救援行动。

§1-3 大地测量学的发展简史与趋势

一、大地测量学的发展简史

大地测量学是伴随人类认识地球的不断深化而逐渐形成和发展起来的。

(一)萌芽阶段

在 17 世纪以前,大地测量只是处于萌芽状态。公元前 3 世纪,亚历山大的埃拉托斯特尼(Eratosthenes)首先应用几何学中圆周上一段弧 AB 的长度 S、对应的中心角 γ 同圆半径 R 的关系,估计了地球的半径长度(见图 1-1)。由于圆弧的两端 A 和 B 大致位于同一子午圈上,以后在此基础上发展为子午弧度测量。公元 724 年,中国唐代的南宫说等人在张遂(一行)的指导下,首次在今河南省境内实测了一条长约 300 km 的子午弧。其他国家也相继进行过类似的

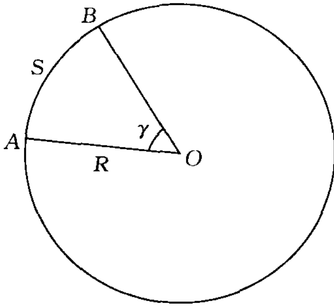


图 1-1 地球半径的测算

工作。然而由于当时测量工具简陋，技术粗糙，所得结果精度不高，只能看做是人类试图测定地球大小的初步尝试。

(二)大地测量学科的形成

人类对于地球形状的认识在 17 世纪有了较大的突破。继牛顿(I. Newton)于 1687 年发表万有引力定律之后，荷兰的惠更斯(C. Huygens)于 1690 年在其著作《论重力起因》中，根据地球表面的重力值从赤道向两极增加的规律，得出地球的外形为两极略扁的扁球体的论断。1743 年法国的克莱洛(A. C. Clairaut)发表了《地球形状理论》，提出了用重力测量方法求出地球形状的克莱洛定律。惠更斯和克莱洛的研究为用物理学观点研究地球形状奠定了理论基础。

此外，17 世纪初荷兰的斯涅耳(W. Snell)首创了三角测量。这种方法可以测算地面上相距几百公里，甚至更远的两点间的距离，克服了在地面上直接测量弧长的困难。随后又有望远镜、测微器、水准器等的发明，测量仪器精度大幅度的提高，为大地测量学的发展奠定了技术基础。因此可以说大地测量学是在 17 世纪末叶形成的。

(三)弧度测量的发展

1683～1718 年，法国的卡西尼父子(G. D. Cassini & J. Cassini)在通过巴黎的子午圈上用三角测量法测量了弧幅达 8°20′的弧长，由其中的两段弧长和在每段弧两端点上测定的天文纬度，推算出地球椭球的长半轴和扁率。由于天文纬度观测没有达到必要的精度，加之两个弧段相近，以至得出了负的扁率值，即地球形状是两极伸长的椭球，与惠更斯根据力学定律所作出的推断正好相反。为了解决这一疑问，法国科学院于 1735 年派遣两个测量队分别赴高纬度地区拉普兰(位于瑞典和芬兰的边界上)和近赤道地区秘鲁进行了子午弧度测量，全部工作于 1744 年结束。两处的测量结果证实纬度愈高，每度子午弧愈长，即地球形状是两极略扁的椭球。至此，关于地球形状的物理学论断得到了弧度测量结果的有力支持。

另一个著名的弧度测量是德朗布尔(J. B. J. Delambre)于 1792～1798 年间进行的弧幅达 9°40′的法国新子午弧的测量。由这个新子午弧和 1735～1744 年间测量的秘鲁子午弧的数据，推算了子午圈一象限的弧长，取其千万分之一作为长度单位，命名为一米。这是米制的起源。

从 18 世纪起，为了满足精密测图的需要，继法国之后，一些欧洲国家也都先后开展了弧度测量工作，并把布设方式由沿子午线方向发展为纵横交叉的三角锁或三角网。这种工作不再称为弧度测量，而称为天文大地测量。

中国清代康熙年间(1708～1718 年)为编制《皇舆全图》，曾实施了大规模的天文大地测量。在这次测量中，也证实高纬度的每度子午弧比低纬度的每度子午弧长。另外，康熙还决定以每度子午弧长为 200 里来确定里的长度。

(四)几何大地测量学的发展

19 世纪起，许多国家都开展了全国天文大地测量工作，其目的并不仅是为求定地球椭球的大小，更主要的是为测制全国地形图提供大量地面点的精确几何位置。为此，需要解决一系列理论和技术问题，这就推动了几何大地测量学的发展。首先，为了检校天文大地测量的大量观测数据，消除其间的矛盾，并由此求出最可靠的结果和评定观测精度，法国的勒让德(A. M. Legendre)于 1806 年首次发表了最小二乘法的理论。事实上，德国数学家和大地测量学家高斯(C. F. Gauss)早在 1794 年已经应用了这一理论推算小行星的轨道。此后他又用最小二乘

法处理天文大地测量结果，把它发展到了相当完善的程度，产生了测量平差法，至今仍广泛应用于大地测量。其次，三角形的解算和大地坐标的推算都要在椭球面上进行。高斯于 1828 年在其著作《曲面通论》中，提出了椭球面三角形的解法。关于大地坐标的推算，许多学者提出了多种公式。高斯还于 1822 年发表了椭球面投影到平面上的正形投影法，这是大地坐标换算成平面坐标的最佳方法，至今仍在广泛应用。另外，为了利用天文大地测量成果推算地球椭球长半轴和扁率，德国的赫尔默特(F. R. Helmert)提出了在天文大地网中所有天文点的垂线偏差平方和为最小的条件下，解算与测区大地水准面最佳拟合的椭球参数及其在地球体中的定位方法。以后这一方法被人称为面积法。

(五)物理大地测量学的发展

自从 1743 年克莱洛发表了《地球形状理论》之后，物理大地测量学的最重要发展是 1849 年英国的斯托克斯(G. G. Stokes)提出的斯托克斯定理。根据这一定理，可以利用地面重力测量结果研究大地水准面形状。但它要求首先将地面重力的测量结果归算到大地水准面上，这是难以严格办到的。尽管如此，斯托克斯定理还是推动了大地水准面形状的研究工作。大约 100 年后，苏联的莫洛坚斯基(M. C. Molodensky)于 1945 年提出了莫洛坚斯基定理，它不需任何归算，便可以直接利用地面重力测量数据严格地求定地面点到参考椭球面的距离(即大地高程)。这个定理的重要意义在于它避开了理论上无法严格求定的大地水准面，而直接严格地求定地面点的大地高程。利用这种高程，可把大地测量的地面观测值准确地归算到椭球面上，使天文大地测量的成果处理不致蒙受由于归算不准确而带来的误差。伴随着莫洛坚斯基定理产生的天文重力水准测量方法和正常高系统已被许多国家采用。

(六)卫星大地测量学的发展

到了 20 世纪中叶，几何大地测量学和物理大地测量学都已发展到了相当完善的程度。但是，由于天文大地测量工作只能在陆地上实施，无法跨越海洋；重力测量在海洋、高山和荒漠地区也仅有少量资料，因此地球形状和地球重力场的测定都未得到满意的结果。直到 1957 年第一颗人造地球卫星发射成功之后，产生了卫星大地测量学，才使大地测量学发展到了一个崭新的阶段。

人造卫星出现后的不长时间内，人们用卫星法精密地测定了地球椭球的扁率。此后经过了 10 多年时间，地球椭球长半轴的测定精度达到±5 m，地球重力场球谐展开式的系数可靠地推算到 36 阶，而且还由卫星跟踪站建立了全球大地坐标系。现在的 GPS 定位技术，根据精密测定的卫星轨道根数，能够高精度地测定任一地面点在全球大地坐标系中的地心坐标；利用卫星雷达测高技术测定海水大地水准面的起伏也取得了很好的成果；卫星重力测量技术也正在发展中，并具有很大的潜力。

(七)动力大地测量学的发展

地壳不是固定不动的，由于日、月引力和构造运动等原因，它经历着微小而缓慢的运动。如果没有精密的测量手段，这样的运动是无法准确测出的。1967 年甚长基线干涉测量技术问世，在长达几千公里的基线两端建立的射电接收天线，同步接收来自河外类星体射电源的信号，利用干涉测量技术，能够以厘米级的精度求得这条基线向量在惯性坐标系中的 3 个分量。类星体射电源距离地球极为遥远，它们相对于地球可以看作没有角运动。因此，由已知的一些类星体射电源的位置，可以建立一个极为稳定的，从而可以认为是惯性的空间参考坐标系。由长时期所作的许多短间隔的重复观测，可以求出基线向量 3 个分量的变化，并由此分解出极

移、地球自转速度变化、板块运动和地壳垂直运动。因此，甚长基线干涉测量技术是研究地球动态的有效手段。结合卫星激光测距技术和固体潮观测，便形成了动力大地测量学，给予地球动力学以有力的支持。20 世纪 90 年代以后，随着 GPS 技术的成熟，GPS 测量已成为动力大地测量的主要手段。

二、大地测量学的发展趋势

大地测量学从形成到现在已有 300 多年的历史，在研究地球形状、地球重力场和测定地面点位置等方面已取得了可观的成就，当前大地测量学主要在以下方面呈现新的发展趋势。

(一)以空间大地测量为主要标志的现代大地测量学已经形成

现代科学技术的成就，特别是激光技术、微电子技术、人造卫星技术、河外射电源干涉测量技术、调整计算机和高精度原子计时频标技术的飞跃发展，导致大地测量出现了重大突破，产生了以人造卫星(信号)或河外射电源(信号)为观测对象的空间大地测量。这一突破，使距离和点位测定能在全球任意空间尺度上达到 $10^{-6} \sim 10^{-9}$ 的相对精度，并能以数分钟或数小时的高效率确定一个地面点的三维位置，从根本上突破了经典大地测量的时空局限性。地面重力测量仪也进展到微伽级甚至更高的精密度，特别是空间大地测量所包括的卫星重力技术，可以获取包括海洋在内的全球覆盖的重力场信息。技术的突破导致学科经历了一次跨时代的革命性转变，已进入了以空间大地测量为主要标志的现代大地测量学科发展的新阶段。这一转变的主要体现是：

(1)从分离式一维(高程)和二维(水平)大地测量发展到三维和包括时间变量的四维大地测量。

(2)从测定静态刚性地球假设下的地球表面几何和重力场元素发展到监测研究非刚性(弹性、流变性)地球的动态变化。

(3)局部参考坐标系中的地区性(相对)大地测量发展到统一地心坐标系中的全球性(绝对)大地测量。

(4)测量精度提高了 2～3 个量级。

这些转变大大扩展了大地测量学科的研究领域，形成了区别于经典大地测量的现代大地测量学。

(二)向地球科学基础性研究领域深入发展

现代大地测量技术业已显示的发展潜力，表明可以在任意时空尺度上以足够的准确度更完善地监测地球运动状态及其形体和位场的变化，地球几何和物理状态的变化是其内力源和外力源作用下经历动力学过程的结果，大地测量学的任务不仅是监测和描述各种地球动力学现象的精细图像，更重要的是解释其发生的机制和预测其演变过程，这就是大地测量反演问题，包括地壳运动、地球自转变化、重力场变化的地球物理反演，即由大地测量时变观测数据反推地球内部构造形态、力源和动力学过程参数，这一大地测量与相关地学学科交叉的研究领域已形成了动力大地测量学这个新的学科分支，这是大地测量学的一个最具活力的边缘性学科分支，其发展一方面依赖于空间大地测量和物理大地测量的发展，又与相关地球科学的发展密切相关，有相对的独立性，其完整的理论体系和方法仍在建立之中。

现代大地测量的发展方向将主要面向和深入地球科学，其基本任务是：

(1)建立和维持高精度的惯性和地球参考系，建立和维持地区性和全球的三维大地网，包

括海底大地网，以一定的时间尺度长期监测这些网随时间的变化，为大地测量定位和研究地球动力学现象提供一个高精度的地球参考框架和地面基准点网。

(2)监测和解释各种地球动力学现象，包括地壳运动、地球自转运动的变化、地球潮汐、海面地形和海平面变化等。

(3)测定地球形状和地球外部重力场精细结构及其随时间的变化，对观测结果进行地球物理学解释。

这些任务将在现代科学技术的支持下，在与相关地球学科的交叉发展中得到实现，大地测量将成为推动地球科学发展的前沿学科之一。

(三)空间大地测量主导着学科未来的发展

空间大地测量在大地测量学科未来发展中的主导地位已经为它本身所显示的广泛应用前景和巨大潜力所确定。就常规测图和一般工程控制目的来说，GPS 定位技术已经基本取代了以经纬仪和测距仪为工具的地面测量技术，这是因为这一卫星定位技术的精度、作业效率、劳力和财力投入都优于地面技术；就大地测量学的科学目的来说，监测和研究各种地球动力学和地球物理学现象及过程将成为其主要任务，这就要求大地测量技术在空间和时间尺度两方面都有实现这一科学目的的能力，即要求能达到足够高的时空采样率。在空间尺度上，要求有进行地区和全球尺度高精度定位和确定高精度高分辨率全球重力场的能力；在时间尺度上，要求能够监测从地震突发地壳形变到板块长期缓慢运动，在构造活动强烈人口密集的地震带还要求能自动连续监测，位移监测精度要求达到 $10^{-8}\sim10^{-9}$（相当于±1 mm），重力异常的测量要求能以小于 30 km 的分辨率达到 1～3 mGal(1 mGal= 10^{-5} m/s^2)的精度。这些要求从现今科学技术水平来看，只有大力发展以卫星大地测量为主的空间大地测量才是可行的。

目前正在应用或发展的空间大地测量技术主要包括以下几类：GPS 等卫星定位系统；卫星激光测距(SLR)；卫星测高；射电源甚长基线干涉测量(VLBI)；卫星重力梯度测量；卫星跟踪卫星测量。

(四)卫星导航定位技术扩展了大地测量学科的应用面

GPS 技术能为静态或动态目标提供廉价、高效、连续而精密的定位及运动状态的描述，除了在大地测量学科本身及在相关地学研究中的应用外，作为大众化的应用技术，GPS 大大扩展了大地测量学科的应用面，GPS 定位设备将是信息时代人们社会经济活动和日常生活的必需品。

(五)地球重力场研究将致力于发展卫星和航空重力探测技术恢复高分辨率地球重力场

近 30 年来地球重力场研究取得了重要进展，主要有：开创了卫星重力技术时代；出现了微伽级精度的绝对重力仪和相对重力仪。

在以基础地学研究为主的现代大地测量的整体框架中，物理大地测量和空间大地测量紧密结合组成了学科的支柱，共同处于支配学科发展的地位，确定重力场结构的精细程度将是未来大地测量学科发展的主要标志之一。

重力测量技术的发展将致力于分辨重力场短波频谱和监测重力场时变量。卫星重力技术的发展将实现准确度 1～2 mGal，分辨率为 50 km 的全球重力场。最新的第五代绝对重力仪准确度可达$\pm(1\sim2)\times10^{-3}$ mGal，超导(相对)重力仪精度已达 0.1×10^{-3} mGal，航空重力测量和惯性重力测量精度大致为±(1～6) mGal，是分辨小于 50 km 短波重力场的有效技术。由于重力测量技术的发展，已有可能监测重力场时变量，为研究地球动力学提供新的重要信息。

第二章　大地测量数据采集技术概述

为完成大地测量学的学科任务，需要在广大的范围内开展各类大地测量数据采集活动。本章简要介绍大地测量中常用到的地面边角测量、高程测量、空间大地测量、物理大地测量等数据采集技术的方法、原理等。

§2-1　地面边角测量

一、角度测量

建立国家大地控制网过程中，常常需要进行大量的水平角和垂直角测量，经纬仪是测定水平角和垂直角的仪器，通过一定的观测方法来进行角度测量。

(一)水平角和垂直角

1. 水平角

如图 2-1 所示，A、P_1、P_2 为地面上三个大地控制点，设 A 为测站点，P_1、P_2 为照准点。过 A 点作铅垂线 AV(重力方向线)，并作过 A 点且垂直于 AV 的平面 M，称为 A 点的水平切面。铅垂线 AV 与视准线 AP_1 构成的平面(垂直照准面)与水平切面 M 相交的线为 Aq_1，称为视准线 AP_1 在水平切面上的投影，习惯上称为 AP_1 的水平视线。同样，Aq_2 为 AP_2 的水平视线。Aq_1 与 Aq_2 之间的夹角称为 A 点对 P_1、P_2 两个方向的水平角。

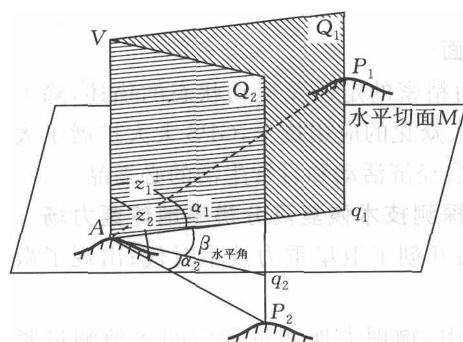


图 2-1　水平角和垂直角

水平角是在水平面上由 0～360°的范围内按顺时针方向量取的。

2. 垂直角

视准线 AP_1 与其水平视线 Aq_1 之间的夹角，称为 A 点照准 P_1 点的垂直角，以符号 α_1 表示。同样，视准线 AP_2 与其水平视线 Aq_2 之间的夹角 α_2 为 A 点照准 P_2 点的垂直角。所以，垂直角就是视线与其相应水平视线之间的夹角。垂直角又称为竖直角或高度角。

垂直角在垂直面上由 0～±90°范围量取，在水平视线之上的为正(如图中之 α_1)，在水平视线之下的为负(如图中之 α_2)。

视线 AP_1 和 AP_2 与铅垂线 AV(天顶方向)之间的夹角 Z_1 和 Z_2 分别称为 A 点照准 P_1 和 P_2 点的天顶距。

由图 2-1 看出，某一照准点的垂直角和天顶距之和为 90°，即

$$\alpha + Z = 90° \tag{2-1}$$

根据这个关系式，垂直角和天顶距之间很容易相互换算。

(二)经纬仪

经纬仪是用来测量水平角和垂直角(天顶距)的仪器。经纬仪的类型很多,有经典的光学经纬仪与现代的电子经纬仪。按精度分,我国将经纬仪分为J07、J1、J2、J6等。J是汉语拼音经纬仪的第一个字母,后面的数字表示其测角精度(中误差)。J07、J1为高精度经纬仪,适用于国家一、二等控制测量;J2为中等精度经纬仪,适用于国家三、四等控制测量。

经纬仪由图2-2所示的主要部件组成,主要部件的相互关系是:

(1)垂直轴应与照准部水准器轴垂直。当水准气泡居中时,垂直轴就与铅垂线一致。

(2)垂直轴应与水平度盘正交,且通过其中心。当垂直轴垂直时,水平度盘就与过测站的水平面平行,此时量取的角度才是正确的水平角。

(3)水平轴应与垂直轴正交,视准轴应与水平轴正交。这样,当垂直轴垂直而望远镜俯仰时,视准轴所形成的面才是垂直照准面。

(4)水平轴应与垂直度盘正交,并通过其中心。当垂直轴垂直、水平轴水平时,垂直度盘就平行过测站的垂直照准面,最取的角度才是正确的垂直角。

(5)垂直度盘的指标水准器气泡居中时,垂直度盘的读数指标必须水平或垂直。这样,读数指标与望远镜视准轴之间的夹角就可得到垂直角。

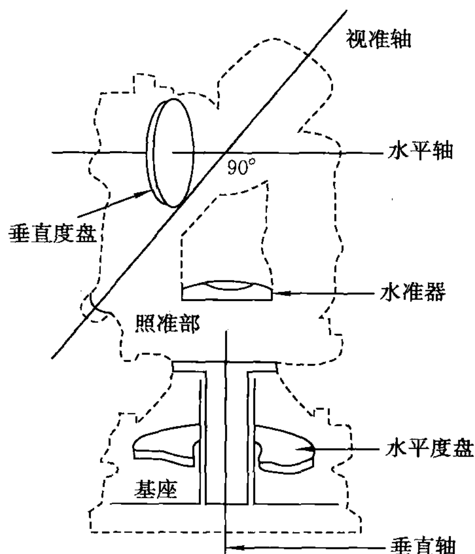


图2-2　经纬仪基本结构

经纬仪的各主要部件就是按上述关系构成的。总的说,要求三轴(垂直轴、水平轴、视准轴)相互关系正确,两盘(水平度盘、垂直度盘)与三轴间的关系正确,这是非常重要的。

电子经纬仪与光学经纬仪不同之处,在于用数字显示来代替目视读数,采用的是电子测角技术,故又称电子数字经纬仪。它由光学器件、机械器件、电子传感器和微处理机等构成。其轴系、望远镜、制(微)动机构的构造与光学经纬仪相同,用电子传感器来代替普通经纬仪的读数指标,通过模拟数字转换方法,从度盘上取得电信号,再把电信号转换成角度,并由显示器输出。从总体上看,根据度盘是否转动分为动态测角和静态测角两类;根据度盘刻制方式不同又可分为编码度盘测角和光栅度盘测角两种,具体的原理,这里不再赘述。

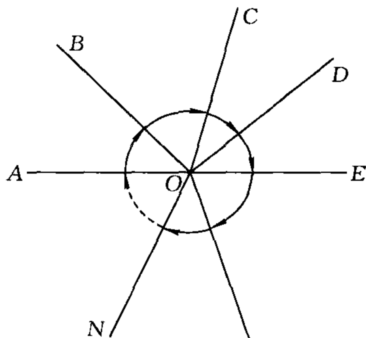


图2-3　方向观测法

(三)水平角观测方法

1. 方向法和全圆方向法

在每一测回中,把测站上所有待测方向逐一观测,以测得各方向的方向值。如图2-3所示,测站O上的待测方向为A、B、…、N,选择其中一个A为起始方向(又称零方向),先在盘左位置观测,照准A并读数,而后顺时针方向旋转照准部,依次照准B、C、…、N,并分别读数,是为上半测回;纵转望远镜,逆时针方向旋转照准部,按与上半测回相反的次序观测N、…、C、B、A,是为下半测回。上、下两半测回合为一测回。这就是方向观测法。

基于方向法，在每半测回的末尾再测一次零方向 A（称为归零），由于每半测回都要闭合到起始方向，故称全圆方向法。闭合到起始方向的目的在于检查半测回的观测过程中仪器座架有无变化。这两种方法基本上是一样的，可统称为方向法。当观测方向数等于或小于三时，一测回使用的时间较短，可采用方向法（不归零），方向数大于三时，都采用全圆方向法。

在全圆方向法中，零方向选择是否适当对整个测站的观测精度和速度都有影响，所以，一定要选取边长适中、通视良好、目标成像清晰的方向为零方向。

目前方向法主要用于较低精度的角度测量。方向法观测得到的是测站上各观测方向的方向值，所选取的零方向其方向值为零，各方向之间的夹角可由两方向值之差获得。

2. 全组合测角法

方向法是一种程序简明、工作量小的观测方法。但是，国家高级控制网中边长较长，各目标的成像质量很难同时良好。此外，它一测回的时间较长，也不易取得精度很高的成果。针对这些缺陷，产生了全组合测角法。全组合测角法的主要特点是：每次只测两个方向间的夹角。可以克服各目标成像不能同时清晰稳定的困难，又大大缩短了一测回的观测时间，易于取得高精度的成果，所以它是高精度水平角观测必须采用的方法。

将测站上所有待测方向每次取两个组合成的全部单角称为全组合角。例如，测站要观测的方向共有 4 个，可组成 6 个单角：(1－2)、(1－3)、(1－4)、(2－3)、(2－4)、(3－4)，如图 2-4 所示。若测站上有 n 个方向，则组合角总数为

$$K = \frac{1}{2}n(n-1) \tag{2-2}$$

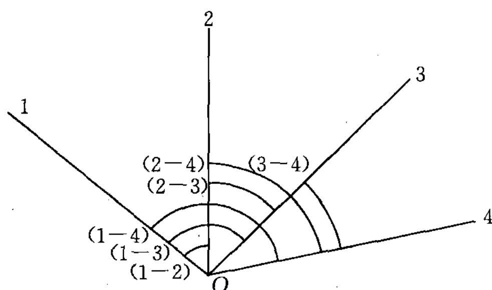


图 2-4 全组合测角法

观测时每个测回只观测一个单角，各组合角的测回数相同。为了更完善地消除照准部旋转时的带动误差，同一测回内上、下半测回的照准部旋转方向相同。但是整份成果和各单角的各测回应有一半测回顺旋、一半逆旋，以便更好地减弱其他误差。为此，在每一观测时间段内测至半数测回时，应改变照准部的旋转方向；或采用测回间改变照准部的旋转方向，交替进行。

以上对方向法和全组合测角法作了介绍，其中方向法主要优点是观测程序简单，作业量小；缺点是若待测方向数较多时很难保证所有方向的目标都清晰，另外一测回时间较长而受外界条件影响较大，难以取得高精度的观测结果。全组合测角法的优点是每角测回可灵活选择清晰目标观测单角，观测时间短，成果受外界影响小；缺点是观测程序比较复杂，其组合单角的数量随待测方向的增加而急增，作业量大。因此方向法是适应于较低精度的角度观测方法，全组合测角法适用高精度角度观测。

对于垂直角测量，其观测方法和观测精度要求并不高，只需上、下半测回对目标用望远镜的横丝观测即可构成一个完整测回，可算出垂直角。

二、距离测量

数百年来，人们测量距离的方法，都是用一根带分划的尺子（测绳、皮尺、钢尺）采取直接比对的方法来求得距离。这种方法的主要缺点是易受测线上地形条件的限制。要想测得较高精

度的距离成果，必须花费很大的人力、物力来选取和整理测量路线，不但工作量大、成本高，而且，一旦碰到测线上有如河流、湖泊乃至山冈、沟壑，测距便无法进行。

随着科学技术的发展，20 世纪 40 年代，出现了一种新型的测距仪器：光电测距仪，也是最早的一种电磁波测距仪。之后又相继出现了微波测距仪、激光测距仪和红外测距仪，直至目前出现的集测角测距为一体的全站型电子速测仪，形成了用电磁波测距方法取代分划尺直接比对方法以及光学视距间接测距方法的新时代。

(一)电磁波测距的基本原理

如图 2-5 所示，安置于距离端点 A 一端的测距仪，向安置于距离另一端点 B 的反射器，发出电磁波，到达 B 点后，又返回到 A 点，被测距仪接收。测距仪本身可以测出电磁波在 A、B 两点间往返传播的时间 t_{2D}，根据公式

$$D = \frac{1}{2} V t_{2D} \tag{2-3}$$

可以求得距离。

式中，V 是电磁波在大气中的传播速度

$$V = \frac{c}{n} \tag{2-4}$$

其中，c 为真空中的电磁波速度；n 为电磁波大气折射率。

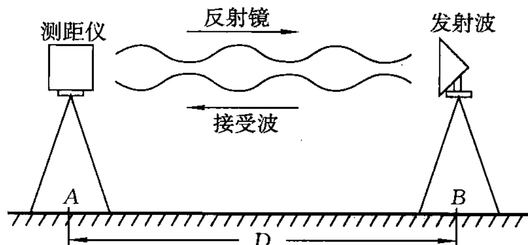


图 2-5　电磁波测距

大气折射率 n 的数值，和电磁波的波长 λ 有关，还和大气的气象元素有关，即：n 与大气温度 t、大气压力 p 和大气湿度 e 的关系式可表示为

$$n = f(\lambda、t、p、e) \tag{2-5}$$

电磁波测距的基本原理，就是利用仪器直接或间接地测出电磁波在被测距离上的往返传播时间 t_{2D}，同时测出大气的温度 t、气压 p 及湿度 e，然后按照上述公式求得距离。

不难看出，利用电磁波测距的方法，能直接在端点测量出两点的距离。只要测程可以达到，中间没有障碍物遮挡，任何地形条件下的距离均可测量。高山之间、江河两岸，甚至星球之间（卫星激光测距仪），也能够直接测量，这就大大加快了测量速度。

(二)电磁波测距的基本方法

电磁波测距有三种基本方法。

1. 脉冲法测距

直接测定发射脉冲（主波）与由目标反射回来的反射脉冲（回波）之间的传播时间 t，按式(2-3)可算出到目标的距离 D。这种方法一次测量便可求得被测距离，测程近的为几公里、十几公里，最远的可达几十万公里，精度一般可达到“厘米级”。主要用于低精度或长距离的测量中。如战术前沿侦察，地球对月球和地面与人造卫星的距离测量等。

2. 相位法测距

直接测定连续测距信号的发射波与回波之间的相位差从而间接测得信号的传播时间。这种测距方法精度比较高，优于“毫米级”，测程在几十公里以内。目前地面上的精密测距，一般采用相位测距法。

3. 干涉法测距

利用光学干涉的物理原理进行精密测距，精度高于相位法测距，一般精度可达“微米级”，

多用于计量单位的长度量具鉴定及短距离的精密测距。

(三)电磁波测距仪的分类

目前,电磁波测距仪按载波的波段分类,可分成如下三类:

(1)微波测距仪。载波波长在微波波段,一般波长在 8 mm～10 cm 之间。

(2)激光测距仪。载波波长多为 0.632 8 μm 的红色可见光,发光技术为受激辐射(即激光发射)。

(3)红外测距仪。载波波长多为 0.75～0.95 μm 范围,发光技术有受激辐射(即激光发射),也有自发辐射(萤光)。

一般电磁波测距分为电波测距和光波测距。电波测距是指微波测距,而光波测距却包含两类:一类可见光测距,另一类则是不可见光的红外测距。

可见光波测距仪又可分两类,早期是以自发辐射形式发出的光,光源是白炽灯或者汞灯,后来是以受激辐射形式发出的激光,光源一般是 He-Ne(氦、氖)激光器,发出的光是 $\lambda=0.6328\ \mu m$的红色光。归纳如图 2-6 所示。

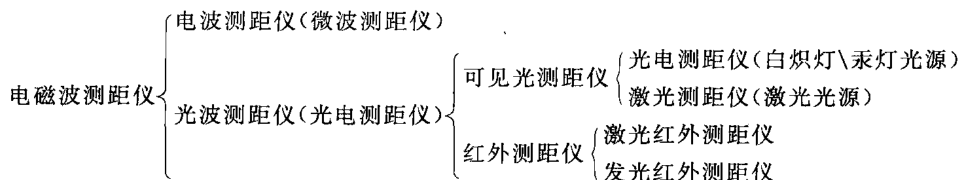


图 2-6　电磁波测距仪分类

三、天文测量

天文测量是利用天文方法观测天体(主要是恒星)的位置来确定地面点的位置(天文经度和天文纬度)和某一方向的天文方位角的技术。天文测量是一门古老的科学,其起源可以追溯到人类文化的萌芽时代。远古时候,为了指示方向、确定时间和季节,先后创造出日晷和圭表,并用北极星来确定北方向。

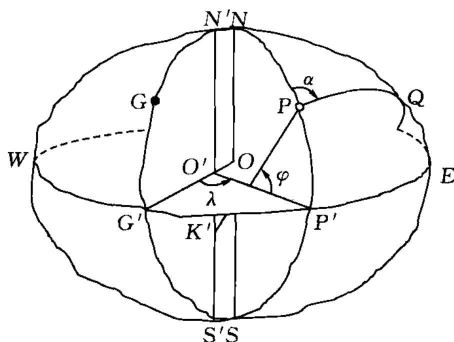


图 2-7　天文坐标系

(一)天文坐标系的定义

天文坐标系是以大地体和铅垂线为基准建立的。以地面点铅垂线和水准面为基准,通过天文测量方法可测得地面点的天文经度、天文纬度和天文方位角,它们构成了天文坐标系的基本要素。

如图 2-7 所示,NS 为地轴,它与地球相交的点 N、S 分别为北极和南极;O 为地心;通过地心垂直于地轴的平面 $OWG'P'E$ 为地球赤道面;P 为地面点,PK' 为 P 点的铅垂线方向;包含 P 点铅垂线的平面称为 P 点的垂直面,其中平行于地轴的垂直面 $N'PP'S'K'$ 称为 P 点的天文子午面。过格林尼治天文台的子午面 $NGG'S$ 为起始天文子午面。

天文经度:地面某点的天文经度,是该点天文子午面与起始天文子午面的夹角,以 λ 表示。由起始子午面向东、向西量度,各由 0～180°。向东称为东经,向西称为西经。东经为正,西经为负。

天文纬度：地面某点的天文纬度，是该点铅垂线与地球赤道面的夹角，以 φ 表示。由地球赤道面向南北两极量度，各由 0～90°。向北称为北纬，向南称为南纬。北纬为正，南纬为负。

天文方位角：设 P 为测站点，Q 为照准点，则包含 P 点铅垂线和 Q 点的垂直面，就是 PQ 方向的照准面。PQ 方向的天文方位角，就是 P 点的天文子午面与 PQ 方向的照准面间的夹角，以 α 表示，其值在测站的水平面上，从正北方向起，顺时针方向量度，由 0～360°。

起始子午面与地球表面的交线，称为起始子午线。起始子午线是约定的。1884 年国际经度会议决定，以通过英国格林尼治(Greenwich)天文台(Airy 中星仪十字丝中心)的子午线，作为起始子午线，称为本初子午线，也称首子午线。

(二)天文测量的方法

1. 传统天文测量方法

目前，天文测量多采用传统方法，即主要是：以收天文台发布的时号来确定时刻，用计时器记录时刻；观测中所用仪器主要是 T4 和 60°等高仪。普遍采用的方法有以下几种：

(1)用 T4 采用太尔各特法测定一等天文纬度。

(2)用 T4 采用东西星等高法(金各尔法)测定钟差，从而测定一等天文经度。

(3)北极星任意时角法测定天文方位角。

(4)用 60°等高仪(由 T3 加上 60°棱镜等组成)采用多星等高法同时测定二、三等及等外天文经纬度。

2. 新型天文测量方法

新型方法主要是利用具有授时功能的 GPS OEM 板接收卫星信号进行授时；用电子经纬仪代替光学经纬仪进行观测；用便携式计算机通过软件控制等技术取代计时器及时钟进行时间比对和授时，并实现观测数据的自动记录、解算。目前采用的方法是：

(1)利用多星近似等高法同时测定一、二等天文经纬度。

(2)利用北极星多次时角法测定一、二等天文方位角。

§2-2　高程测量

一、水准测量

(一) 水准测量原理

水准测量是精确测定两点间高差的方法，基本原理是：在待测定高差的两点上，垂直竖立有精密分划的标尺，用水平视线在标尺上读数，两标尺读数之差就是此两点的高差。如图 2-8 所示，A、B 为待测高差的两地面点，分别垂直竖立标尺 R_1、R_2，在 A、B 中间的 S_1 点上设置水准仪，借助仪器的水平视线对标尺 R_1 读数，得 a(称后视读数)，再对 R_2 读数，得 b(称前视读数)，则 A、B 两点的高差为

$$h_{AB} = a - b \tag{2-6}$$

式中，h_{AB} 叫做 B 对 A 的高差。当 $a > b$，高差为正；$a < b$ 时，高差为负。

若已知 A 点的高程为 H_A，则 B 点的高程 $H_B = H_A + h_{AB}$，如果测定任意点 P 的高程 H_P，则在测定 A、B 高差后，将水准仪迁到 S_2 处，同时将标尺 R_1 移至 C 点，测定 B、C 的高差 h_{BC}，依此类推，A、P 之间的高差即为

$$h_{AP} = h_{AB} + h_{BC} + \cdots$$

P 点的高程为

$$H_P = H_A + h_{AP} \tag{2-7}$$

这种传递高程的方法称为几何水准法。

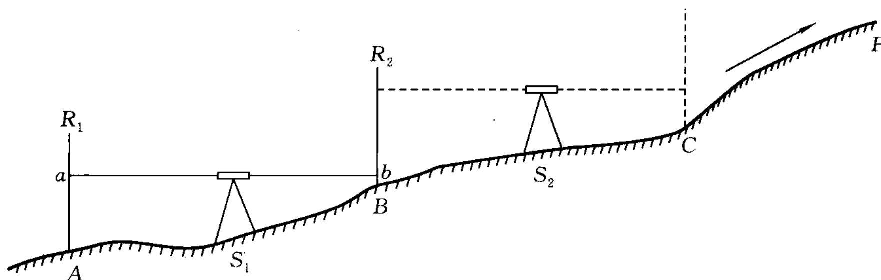


图 2-8 水准测量原理

（二）水准仪和水准标尺

由水准测量的基本原理可知，水准测量的仪器——水准仪必须能建立水平视线。为此，水准仪应具备一个构成视准轴的望远镜；必须有一个能够引导视准轴居于水平位置的元件（水准器就是这种元件中最简单的一种）；为了将视准轴整置在水平位置，并能作水平旋转，需要有脚螺旋和垂直轴。这些部件结合起来，就可以构成一台最简单的水准仪，如图 2-9 所示。这些基本部件之间应满足以下条件：

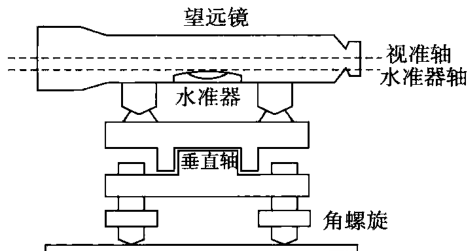


图 2-9 水准仪的基本结构

(1)视准轴应与水准器轴平行。

(2)水准器轴应与垂直轴垂直。

这样，当仪器按水准器整平后，视准轴在各个方向上都水平了。

水准仪按精度分为精密水准仪和普通水准仪。精密水准仪主要用于高精度的高程测量，如国家一、二等水准测量和精密工程测量。普通水准仪用于一般的工程建设和地形测量。精密水准仪和普通水准仪的主要区别是精密水准仪安装了用来精确读数的光学测微器。

水准标尺是测量高差的标准尺，是水准测量的重要工具。精密水准标尺有一条宽 26 mm，厚 1 mm 的因瓦合金带，安装在木质尺身的沟槽内，一端固定在尺身的底板上，另一端由弹簧引张在尺身顶端的金属构架上。标尺的分划是线条式的，漆在合金带上，分划的标称漆在两侧的木质尺身上，标尺全长约 3.1 m。

标尺的分划间隔有 10 mm 和 5 mm 两种，随所用水准仪测微尺的测微范围而定。分划都漆成左右两排。

在水准标尺的尺身后面两侧都装有扶尺环，供扶尺用。为了将标尺竖立在稳固的基础上，还配有尺台或尺桩。

（三）电子水准仪

1990 年 3 月第一台电子水准仪研制成功，这是集电子技术、编码技术、图像处理技术、计算机技术于一体的新型水准仪，代表了水准仪的发展方向。目前，世界上有多家公司生产这种

水准仪。如徕卡公司的DNA03、DNA10；蔡司公司的DiNi10、DiNi20；拓普康公司的DL-101、DL-102等。

电子水准仪与光学水准仪不同之处，是采用条码水准标尺和仪器内装有数字图像识别处理系统。电子水准仪利用数字图像处理技术，通过望远镜把标尺的条码分划影像进行处理和比对，用行阵探测器（传感器）替代观测员的肉眼，从而实现观测（夹准和读数）自动化。测量作业时只要将水准仪概略整平，补偿器自动使视线水平，照准标尺并调焦，按测量键后，在显示器上即显示标尺上的读数和仪尺间距离。

二、三角高程测量

三角高程测量是利用两地面控制点的距离和所观测的垂直角计算两点间的高差，进而计算控制点高程的方法。与几何水准测量相比，具有观测方法简单灵活、不受地形条件限制、传递高程迅速等优点。缺点是推算高程的精度稍低。如果在一定密度水准测量的控制下，用三角高程测量既可保证测定大地控制点的精度，又能克服地形条件的限制，提高了工作效率。

（一）三角高程测量的基本原理

如图2-10所示，A、B为地面上两点，其高程分别为H_1、H_2，A点观测B点垂直角为α_{12}，S_0为两点间的水平距离，i_1为A点仪器高，a_2为B点的目标高，则A、B两点间的高差为

$$h_{12} = H_2 - H_1 = S_0 \tan\alpha_{12} + i_1 - a_2 \tag{2-8}$$

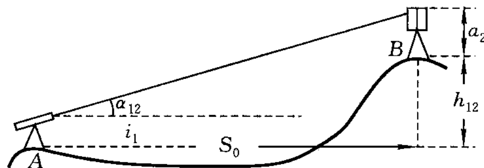


图2-10　三角高程测量原理

如测定的是斜距d，则高差公式为

$$h_{12} = d\sin\alpha_{12} + i_1 - a_2 \tag{2-9}$$

这就是三角高程测量测定高差的基本关系式。若A点高程已知，就可求得B点高程为

$$H_2 = H_1 + h_{12} \tag{2-10}$$

（二）电磁波测距高程导线

电磁波测距高程导线也称精密三角高程测量。随着电子速测仪的发展，测边和测角的精度有了很大的提高，边长测定精度达1/10万以上，测角精度可达0.5″，这就为精密三角高程测量提供了有利的条件。目前三、四等水准测量可完全由测距高程导线替代，并且国家有关部门都制定了相应的规范。在山区和丘陵地区用测距高程导线替代水准测量，其经济效益是非常显著的。

测距高程导线的方法有：每点设站法、隔点设站法和单程双测法。第一种方法是在每一测点上安置仪器进行往、返对向三角高程测量；第二种方法是仪器安放在两标志中间，逐站前进，标志交替设置，测站数应设为偶数，类似于水准测量，但不同的是采用倾斜视线代替水平视线进行测量；第三种方法是在第一种和第二种基础上，每站变换仪器高作两次观测或每站对上、下两个标志作两次观测。以上方法都是用特制的觇板作为照准标志的。

§2-3 空间大地测量

一、GPS 测量

(一)GPS 系统概述

GPS(Global Positioning System)系统是美国国防部于 1973 年 11 月授权开始研制的海陆空三军共用的美国第二代卫星导航系统，耗资近 100 亿美元，于 1994 年进入完全运行状态，是美国继阿波罗登月飞船和航天飞机之后的第三大工程。GPS 系统在测量、导航、制导、精密定位、动态观测、时间传递、速度测量等方面，具有使用方便、观测简单、定位精度高、经济效益好等优点，显示出强大功能及无比的优越性。

GPS 的整个系统由空间部分、地面控制部分和用户部分所组成。

1. GPS 系统组成

1)空间部分

如图 2-11 所示，GPS 的空间部分由 24 颗 GPS 工作卫星所组成，这些 GPS 工作卫星共同组成了 GPS 卫星星座，其中 21 颗为可用于定位和导航的卫星，3 颗为备用卫星。这 24 颗卫星分布在 6 个倾角为 55°的轨道上绕地球运行。在地球上任何地点任何时刻都能观测到 4 颗以上卫星。卫星的高度约为 2 万公里，运行周期约为 12 恒星时。每颗 GPS 工作卫星都发出用于导航定位的信号。GPS 用户正是利用这些信号来进行工作的。

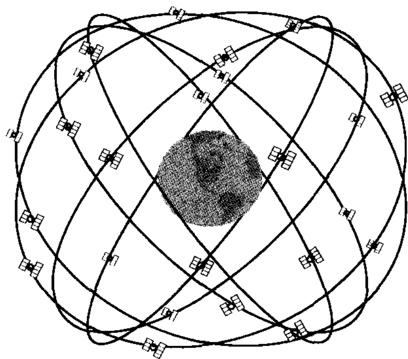


图 2-11 GPS 卫星星座

2)控制部分

GPS 的控制部分由分布在全球的若干个跟踪站组成的监控系统构成。根据其作用的不同，这些跟踪站又被分为主控站、监控站和注入站。主控站有 1 个，位于美国科罗拉多(Colorado)的法尔孔(Falcon)空军基地，它的作用是根据各监控站对 GPS 的观测数据，计算出卫星的星历和卫星钟的改正参数等，并将这些数据通过注入站注入到卫星中；同时，它还对卫星进行控制，向卫星发布指令，当工作卫星出现故障时，调度备用卫星，替代失效的工作卫星工作；另外，主控站也具有监控站的功能。监控站有 5 个，除了主控站外，其他 4 个分别位于夏威夷(Hawaii)、阿森松岛(Ascencion)、迪戈加西亚(Diego Garcia)、夸贾林(Kwajalein)，监控站的作用是接收卫星信号，监测卫星的工作状态。注入站有 3 个，分别位于阿森松岛、迪戈加西亚、夸贾林，注入站的作用是将主控站计算出的卫星星历和卫星钟的改正数等注入到卫星中。

3)用户部分

GPS 的用户部分由 GPS 接收机、数据处理软件及相应的用户辅助设备等所组成。其作用是接收 GPS 卫星所发出的信号，利用这些信号进行导航和定位等工作。

2. GPS 卫星的信号

GPS 卫星发射三种民用频率的载波信号，即频率为 1 575.42 MHz 的 L_1 载波、频率为 1 227.60 HMz 的 L_2 载波、频率为 1 176.45 MHz 的 L_5 载波，它们的波长分别为 19.03 cm、

24.42 cm 和 25.48 cm。在 L_1、L_2 和 L_5 上又分别调制着多种信号,这些信号主要有 C/A 码、P 码、D 码等。

C/A 码又被称为粗捕获测距码,是1.023 MHz的伪随机噪声码(PRN 码),其码长为1 023 位(周期为 1 ms)。由于每颗卫星的 C/A 码都不一样,因此,我们经常用它们的 PRN 号来区分。

P 码为精密测距码,是 10.23 MHz 的伪随机噪声码。

D 码为导航电文,每秒 50 bit,载有卫星位置、状态信息等。

3. GPS 定位服务

GPS 定位服务包括精密定位服务(PPS)和标准定位服务(SPS)。

(1)PPS:授权的精密定位系统用户需要密码设备和特殊的接收机,包括美国军队、某些政府机构以及批准的民用用户。PPS 的定位精度为 15~7 m,时间精度为 100 ns。

(2)SPS:对于普通民用用户,美国政府对定位精度实施控制,仅提供 SPS 服务。SPS 服务可供全世界用户免费、无限制地使用,现有的多数接收机都能够接收和使用 SPS 信号。美国国防部通过所谓的选择可用性(SA)方法有意将 SPS 的精度降低。SPS 的定位精度为100 m。时间精度为 340 ns。

4. GPS 所用坐标系和时间系统

1)WGS 84 坐标系

20 世纪 60 年代以来,为建立全球统一的坐标系统,美国国防部制图局 (Defence Mapping Agency,DMA)就曾建立了 WGS 60,随后又提出了改进的 WGS 66 和 WGS 72。目前全球定位系统使用的 WGS 84,是一个更为精确的全球坐标系统。

WGS 84 坐标系是原点为地球质心,Z 轴指向 BIH 1984.0 定义的协议地极 CTP,X 轴指向 BIH 1984.0 零子午面和 CTP 赤道的交点,Y 轴成右手系。

GPS 单点定位的坐标以及相对定位中解算的基线向量属于 WGS 84 大地坐标系,因为 GPS 卫星星历是以 WGS 84 坐标系为根据而建立的。而实用的测量成果往往是属于某一国家坐标系或地方坐标系。应用中需要通过求解转换参数来进行坐标转换。

2)GPS 时间系统 GPST

为了精密导航和定位的需要,GPS 建立了专用的时间系统。该系统可简写为 GPST,由 GPST 监控站的原子钟提供。

GPS 时属原子时系统,其秒长与原子时相同;但与国际原子时 TAI 具有不同的原点。所以,GPST 与 TAI 在任一瞬间均有一常量偏差,其间关系为:TAI－GPST＝19s。GPST 时和协调时在 1980 年 1 月 6 日 0 时一致。随着时间积累,差值为秒的整倍数。

5. GPS 系统特点及作用

GPS 系统采用高轨测距体制,以观测站至 GPS 卫星之间的距离作为基本观测量。为了获得距离观测量,主要采用两种方法:一是测量 GPS 卫星发射的测距码信号到达用户接收机的传播时间,即伪距测量;另一是测量具有载波多普勒频移的 GPS 卫星载波信号与接收机产生的参考载波信号之间的相位差,即载波相位测量。采用伪距观测量定位速度最快,而采用载波相位观测量定位精度最高。通过对 4 颗或 4 颗以上的卫星同时进行伪距或相位的测量即可推算出接收机的三维位置。

GPS 的问世标志着电子导航技术发展到了一个更加辉煌的时代。GPS 系统与其他导航

系统相比，主要特点是：

(1)全球地面连续覆盖。由于GPS卫星数目较多且分布合理，所以在地球上任何地点均可连续同步地观测到至少4颗卫星，从而保障了全球、全天候连续实时导航与定位的需要。

(2)功能多、精度高。GPS可为各类用户连续地提供高精度的三维位置、三维速度和时间信息。

(3)实时定位速度快。目前GPS接收机的一次定位和测速工作在一秒甚至更少的时间内便可完成，这对高动态用户来讲尤其重要。

(4)抗干扰性能好、保密性强。由于GPS系统采用了伪码扩频技术，因而GPS卫星所发送的信号具有良好的抗干扰性和保密性。

GPS技术已发展成多领域(陆地、海洋、航空航天)、多用途(在途导航、精密定位、精确定时、卫星定轨、灾害监测、资源调查、工程建设、市政规划、海洋开发、交通管制等)、多机型(测地型、定时型、手持型、集成型、车载式、船载式、机载式、星载式、弹载式等)的高新技术国际性产业。GPS的应用领域，上至航空航天器，下至捕鱼、导游和农业生产，已经无所不在了，正如人们所说的"GPS的应用，仅受人类想象力的制约"。

(二)GPS测量与定位方法

GPS定位的方法是多种多样的，用户可以根据不同的用途采用不同的定位方法。GPS定位方法可依据不同的分类标准，作如下划分。

1. 根据定位所采用的观测值划分

1)伪距定位

伪距定位所采用的观测值为GPS伪距观测值，所采用的伪距观测值既可以是C/A码伪距，也可以是P码伪距。伪距定位的优点是数据处理简单，对定位条件的要求低，不存在整周模糊度的问题，可以非常容易地实现实时定位；其缺点是观测值精度低，C/A码伪距观测值的精度一般为3 m，而P码伪距观测值的精度一般也在30 cm左右，从而导致定位成果精度低。

2)载波相位定位

载波相位定位所采用的观测值为GPS的载波相位观测值，即L_1、L_2载波或它们的某种线性组合。载波相位定位的优点是观测值的精度高，一般优于2 mm；其缺点是数据处理过程复杂，存在整周模糊度的问题。

2. 根据定位的模式划分

1)绝对定位

绝对定位又称为单点定位，这是一种采用一台接收机进行定位的模式，它所确定的是接收机天线的绝对坐标。这种定位模式的特点是作业方式简单，可以单机作业。绝对定位一般用于导航和精度要求不高的应用中。

2)相对定位

相对定位又称为差分定位，这种定位模式采用两台以上的接收机，同时对一组相同的卫星进行观测，以确定接收机天线间的相互位置关系。

3. 根据获取定位结果的时间划分

1)实时定位

实时定位是根据接收机观测到的数据，实时地解算出接收机天线所在的位置。

2)非实时定位

非实时定位又称后处理定位,它是通过对接收机接收到的数据进行后处理获得接收机天线所在位置的方法。

4. 根据定位时接收机的运动状态划分

1)动态定位

动态定位,是指在进行 GPS 定位时,接收机的天线在整个观测过程中的位置是变化的。在数据处理时,将接收机天线的位置作为一个随时间变化的量。

2)静态定位

静态定位,是指在进行 GPS 定位时,接收机的天线在整个观测过程中的位置是保持不变的。在数据处理时,将接收机天线的位置作为一个不随时间变化的量。在测量中,静态定位一般用于高精度的测量定位,其具体观测模式是由多台接收机在不同的测站上进行静止同步观测,时间由几分钟、几小时、数十小时甚至 24 小时不间断观测不等。

(三)GPS 接收机

1. 导航接收机

GPS 伪距导航是 GPS 系统最基本的服务方式。GPS 导航以距离作为观测量,利用观测到 4 颗以上卫星的距离(即包含有误差的伪距观测量),计算出接收机相对于卫星的位置。导航型(区别于测量型)GPS 接收机通常只是利用 C/A 或 P 码进行伪距和多普勒测量,它接收导航电文并能实时求得位置和速度。除美国军方及特许用户外,一般只能使用 C/A 码,这类接收机可用于军事和民用导航,可提供中等精度的定位和较高精度的时间传递,是目前应用最广的接收机。

GPS 导航接收机的产品种类很多,功能和操作也有不同,但其基本功能相差不多,基本工作过程也类似。一般的导航接收机的基本工作过程如下。

(1)接通电源。

(2)输入近似位置(要求不差 100 km)。这样可以缩短搜索、锁定卫星的时间,也可以不输入。

(3)等待搜索卫星。接收机自动寻找可观测的卫星,完成锁定。这要等待一段时间,不同接收机的等待时间不同,大约几秒钟到几分钟。

(4)显示定位结果。接收机锁定 4 颗(或 4 颗以上)卫星即开始定位并显示。一般将显示位置和速度,它们是经度、纬度、高程,向北速度、向东速度和向上速度。接收机按所选定的数据更新率,不断更新定位、定速结果。

2. 相位测量接收机

由于载波的波长远小于测距码的波长，所以在分辨率相同的情况下，载波相位的观测精度远较码相位的观测精度为高。例如，对载波 L_1 而言，其波长为 19 cm，所以相应的距离观测误差约为 2 mm；而对载波 L_2 的相应误差约为 2.5 mm。载波相位观测是目前精度最高的观测方法。不少公司生产出不同型号的 GPS 相位测量接收机。美国 Litton Aero Service 公司生产的 MacrometerV-1000 单频（L_1）相位测量接收机，这是最早推出的商用相位测量接收机。近年来的测量型 GPS 接收机的发展趋势是向小型化、高精度和高稳定性发展。

二、卫星激光测距

卫星激光测距(Satellite Laser Ranging,SLR)是20世纪60年代中期兴起的一项空间大地测量技术。它是利用激光测距仪在地面上跟踪观测装有激光反射器的卫星,测定测站至卫星距离的技术和方法。SLR最初是使用BE-C卫星。1976年美国宇航局发射了激光地球动力卫星LAGEOS-1,1992年美国和意大利合作发射了动力卫星LAGEOS-2,扩大了地球上的SLR的观测范围。同时,法国、苏联、日本和德国等先后都发射了SLR卫星。经过30多年的发展,SLR系统的测距精度由开始的1 m提高到现在的1 cm,已成为卫星精密定位观测的主要技术手段之一。它是目前各种空间观测技术中单点采样精度和绝对定位精度最高的技术,它在全球地心坐标系的建立和维护中起着决定性的作用,在现代板块运动的实测、地球重力场模型和地心引力常数的改进、地球自转参数的精确测量等方面也都取得了丰硕的成果。

(一)卫星激光测距原理

卫星激光测距是一种以激光器为光源,以光脉冲飞行时间来度量的物理测距方法。其主要特点如下。

(1)激光器输出的功率可以达到10^9瓦量级,它在单位面积上的光能密度可高于太阳表面,所以作用距离可到达几万公里处的人造地球卫星,甚至到月球表面。

(2)激光的谱线都非常尖锐,半宽为5Å左右,有利于在接收光学系统中采用窄带滤光片来消去天空背景噪声,提高观测信噪比。

(3)激光器输出的光束发散角非常小,在1毫角秒左右,通过光学系统准直,发散角可进一步被压缩,因此在很远的距离上,光能量仍然可集中在很小的范围内。

(4)脉冲激光器的激光脉冲宽度可以达到很小的量级,而脉宽是决定测距精度的主要因素之一,因而激光测距可以达到很高的精度。

正是由于激光的上述特点,使得实现远程激光测距成为可能。激光测距的方法有三种:脉冲法、相位法、干涉法。目前卫星激光测距一般都采用脉冲法,其基本原理非常简单,用安置在地面测站上的激光测距仪向配备了后向反射棱镜的激光卫星发射激光脉冲信号,经被测卫星反射后,激光脉冲信号回到测距仪接收系统,测出发射和接收该激光脉冲信号的时间差Δt,就可按下式求出卫星至地面站的距离(ρ)

$$\rho = \frac{1}{2}c\Delta t \tag{2-11}$$

式中,c为光速。设卫星在地心惯性系的运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = F(\boldsymbol{X}, P_d, t) \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0 \tag{2-12}$$

式中,$\boldsymbol{X}$为卫星在t时刻的状态向量$\boldsymbol{X} = (r, r_0)^{\mathrm{T}}$或$\boldsymbol{X} = \sigma$,$\sigma$为6个轨道根数;$\boldsymbol{X}_0$为卫星初始时刻$t_0$的状态向量;$P_d$为待估的物理参量。式(2-20)的解可以表示为

$$\boldsymbol{X} = Q(\boldsymbol{X}_0, P_d, t) \tag{2-13}$$

设卫星的观测量为Θ_O(观测量为卫地距离),其相应的理论值Θ_C可由下式表示

$$\Theta_C = \Theta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{R}), \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{PNSR}_0 \tag{2-14}$$

式中,$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{R}_0$分别表示测站在惯性系和地固系的位置矢量;$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{S}$分别表示岁差矩阵、章动矩阵和地球自转矩阵。

以上为卫星动力测地的一般测量原理,在实际工作中应当根据不同的情况、不同的目的和

要求，选择适当的参数作为平差量，其他参数采用理论值保持不变，但无论哪一种动力测地一般都需要把卫星轨道作为平差量，即都有一个定轨和测轨的过程。

（二）卫星激光测量系统

卫星激光测距系统主要分为地面的激光测距仪和空间的激光卫星两大部分。其中测距仪的硬件设备主要由激光器、望远镜、光电头、脉冲位置测量系统、时间频率系统、伺服系统和计算机等七个部分组成（结构见图 2-12）。

其工作原理是，激光器产生的光脉冲经导向光路引入发射望远镜，发射望远镜将光束准直后射向作为目标的激光卫星。在发射光束中取出一小部分，通过主波取样电路形成两个电脉冲，一个称主波脉冲，用来启动激光飞行时间间隔计数器，作它的开门信号；另一个电脉冲用来从时钟中取样，记录激光发射时刻。激光脉冲从卫星上反射回地面后，由接收望远镜接收。在接收望远镜的焦点上装有微光探测设备，检测到的回光由光电转换变成电信号，放大、整形以后形成回波脉冲，用来做计数器的关门信号，停止计数器计数。这样计数器记录了主波和回波脉冲的时间间隔 $\Delta t = \tau - T$（见图 2-12）。Δt 就是激光在测站和卫星间往返飞行的时间。

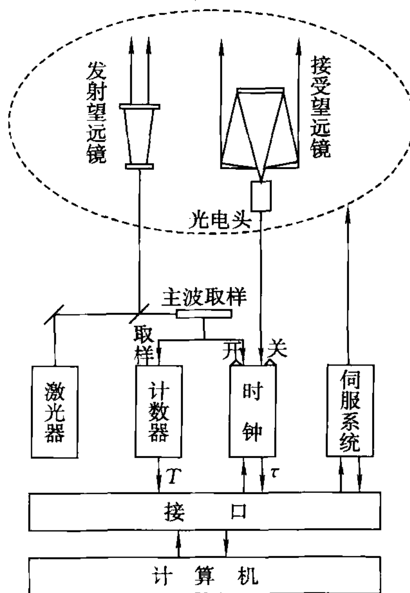


图 2-12　卫星激光测距系统结构

测距仪的望远镜有发射、接收激光和瞄准卫星三个功能。可以设计成三台各自独立的望远镜，也可以设计成在同一架望远镜上，同时实现三种功能。其时频系统有两个功能：其一，是为计数器、激光器、计算机等设备提供稳定的频率源，计数器的频率稳定应好于 10^{-10}；其二，是记录激光发射的时刻，在厘米级精度的测距仪中，时刻记录的精度为 1 μs，好的石英钟或铷钟均可满足上述要求。

激光测距仪只可对配备了专用反射镜的卫星进行观测。入射至卫星的激光必须完成沿发射激光的同一方向返回。这种类型的反向镜也被称为后向反射镜，主要是由玻璃棱镜构成的。为得到所要求的精度，反向镜必须仔细设计以适合专用卫星的几何形状和轨道高度。为使发射激光与接收光子的能量平衡能够得到调整，反射镜尺寸应设计得足够大，以便反射回足够的能量。大部分情况下，几个直径为 2～4 cm 的单反射镜按一定阵列组合，可以获得必要的能量。单个反射镜的准直调整要极其注意，以免引起信号重叠而使脉冲变形。反射镜是无源装置，极易作为附件安装在卫星上。因此不少卫星都装有激光反射镜阵列，目前已有几十颗之多，它们包括专用于地球动力学应用和大地测量的美国宇航局发射的 Lageos-1、Etalon-2 等。特别是 Lageos 卫星，具有高而稳定的轨道，面质比小，球形对称，观测资料积累时间长等特点，特别适用于大地测量研究和观测，图 2-13显示的是 Lageos 卫星的形状，它是一个直径为 60 cm 的球，其表面装有 426 个激光反射器。

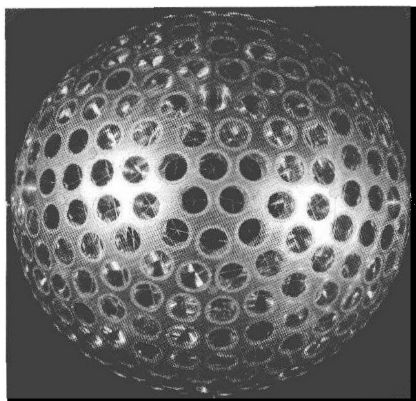


图 2-13　Lageos 卫星

三、甚长基线干涉测量

甚长基线干涉测量技术(Very Long Baseline Interferometer,VLBI)是20世纪60年代后期发展起来的射电干涉观测技术。它能把相距几千甚至上万公里的两台射电望远镜组合成一个分辨率非常高的射电干涉测量系统。两台站间的连线称为基线,因此VLBI被称为甚长基线干涉。分辨率随基线的延伸也得到了提高,目前已经达到0.1毫角秒的量级。VLBI技术的超高分辨率促成其在天文、地球物理、大地测量和空间技术等领域得到了广泛的应用,包括射电天文、地球自转参数精确测定、地壳形变检测、深空探测及电离层探测等等。

(一)VLBI大地测量原理

VLBI技术所观测的天体是距地球非常遥远的河外射电源,它们一般都在距离地球一亿光年以外的宇宙空间。当天体辐射的电磁波到达地球表面时,传播距离远远大于VLBI的基线距离,可以认为此刻波前面是平行传播的,也称为平面波。由于两天线到某一射电源的距离不同,有一路程差 L,则射电信号的同一波前面到达两天线的时间也将不同,有一时间延迟 τ_g。根据图2-14的几何关系可得

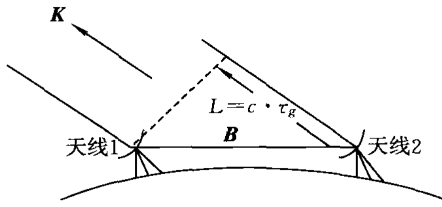


图2-14 VLBI几何原理

$$L = c \cdot \tau_g \tag{2-15}$$

式中,c 为真空光速。若设 $\boldsymbol{B}$ 为天线1到天线2的基线矢量,$\boldsymbol{K}$ 为被观测电源的方向,则有

$$\tau_g = -\frac{1}{c}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{K}) \tag{2-16}$$

由于地球的运动,矢量 $\boldsymbol{K}$ 相对于基线矢量 $\boldsymbol{B}$ 的方向将发生变化,使得 τ_g 是时间的函数,它对时间的导数称为延迟率 $\dot{\tau}_g$,即

$$\dot{\tau}_g = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{K}) \tag{2-17}$$

大地测量所采用的VLBI观测量主要就是延迟和延迟率。

式(2-16)和式(2-17)中的 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{K}$ 必须是同一坐标系中的量。但通常射电源方向是用天球坐标系中的赤经赤纬(α,δ)表示的,而基线矢量是用地球坐标中的矢量 $\boldsymbol{b} = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ 表示的。实际计算时需将 $\boldsymbol{b}$ 转换到天球坐标系中,即

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PNSWb} \tag{2-18}$$

式中,$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{W}$ 分别为岁差旋转矩阵、章动旋转矩阵、地球周日自转旋转矩阵和极移旋转矩阵。

为简明起见,在讨论VLBI原理时,暂不考虑岁差、章动和极移的影响,则式(2-18)可写为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}_z(-\theta_g)\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \Delta X\cos\theta_g - \Delta Y\sin\theta_g \\ \Delta X\sin\theta_g - \Delta Y\cos\theta_g \\ \Delta Z \end{pmatrix} \tag{2-19}$$

将式(2-19)代入式(2-16)、式(2-17)整理可得

$$\tau = -\frac{1}{c}[\Delta X\cos\delta\cos(\theta_g - \alpha) - \Delta Y\cos\delta\sin(\theta_g - \alpha) + \Delta Z\sin\delta] \tag{2-20}$$

$$\dot{\tau} = -\frac{1}{c}[\Delta X\omega_g\cos\delta\sin(\theta_g - \alpha) + \Delta Y\cos\delta\cos(\theta_g - \alpha)] \tag{2-21}$$

式中，θ_g 为格林尼治地方恒星时；ω_g 地球自转速度。

上两式就是利用 VLBI 延迟和延迟率观测量解算有关大地测量参数的原理公式。通过公式的分析可知，VLBI 参数解算具有下列特点。

（1）VLBI 延迟和延迟率是纯几何观测量，其中没有包含地球引力场的信息，因此观测量的获得也不受地球引力场的影响。

（2）VLBI 是相对测量，仅利用 VLBI 技术只能测定出两个天线之间的相对位置，即基线矢量，不能直接测出各天线的地心坐标。为确定 VLBI 站的地心坐标，通常是一个测站上同时进行 VLBI 和 SLR 观测。利用 SLR 技术所测量的地心坐标为基准，进而推算出其他 VLBI 站的地心坐标。

（3）由于射电源的赤经（α）和地球自转的变化（θ_g）之间有直接关系，无法独立地从延迟和延迟率观测量中解算出来。因此，VLBI 技术不能独立地确定射电源参考系的赤经原点，它必须用其他技术来测定。

（4）延迟率观测量中不包含基线 ΔZ 分量的影响，所以仅由延迟率观测无法解算出基线 ΔZ 分量。另外，将延迟率的数据加到延迟数据中，并不会减少为求得所有未知参数所需观测的射电源数目。目前延迟率仅作为辅助观测参加数据处理和参数解算，而起决定作用的是延迟观测量。

（二）VLBI 系统

VLBI 系统结构如图 2-15 所示，由天线、接收机、本振、采样器、记录设备和相关处理机等单元组成。以下结合各单元的基本功能，简要介绍 VLBI 观测量数据采集过程。

（1）首先由组成系统的两个天线接收被测射电源发射的射电信号，并将其聚焦在天线抛物面的焦点上，之后由馈源将收集到的电磁波转换成高频电流，传输给接收机。天测与测地 VLBI 观测量（时延、时延率）的观测精度与系统的信噪比成正比，而信噪比与天线口径成正比，由于河外射电源的信号一般非常微弱，为使时延和时延率的观测能获得足够的信噪比，VLBI 的天线口径一般都在 20 m 以上。

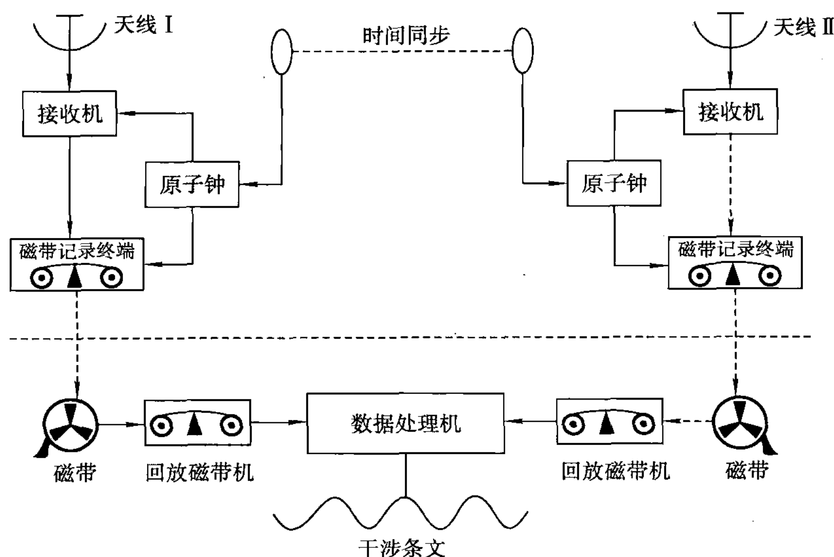


图 2-15　VLBI 系统结构

(2)接收机的主要作用是利用高频放大器将该信号放大成射频信号，之后由混频器变频为具有一定带宽的中频信号。混频器混频时需要一个本振信号，本振信号是由台站的本机振荡器提供的。

(3)接收机的中频信号到达数据记录终端设备，目前采用的设备有MK3系统或升级版的MK4和MK5系统。MK3记录系统主要有两个中频分配器，14个视频变换器和格式单元的数据采集系统，一个磁带记录机，控制数据采集系统和磁带机运行的计算机三部分组成。来自接收机的中频信号被送到中频分配器后，再分送给14个视频变换器，视频变换器的功能是将中频频段内不同频段的信号转换为能被磁带机记录的0～2 MHz的视频信号，也可叫做基带信号(Base Band)。视频变换器输出的视频信号被送到格式单元，它的主要功能是将0～2 MHz的视频信号经过1 bit采样后数字化，由格式编码器为每个数据提供接收时的精确时刻，对数据进行编码，把信号和必要信息编制成特定格式。经格式化后的数据由磁带记录机按照特定的模式记录到专用的磁带上。这里需要指出的是，14个频率转换器有14个独立本振，它们会引起相位漂移，因此需要进行相位校准。相位校准系统是由一个脉冲发生器组成，每一微秒发出一个脉冲注入到信号中，这个脉冲注入点被定义为延迟的参考点。

(4)最后，由磁带记录机记录的观测数据被送到相关处理系统，首先对数据进行回放，再输入给对应通道的相关器进行互相关计算，得到相关函数值，即干涉条纹，然后在计算机上利用软件系统进行条纹拟合计算，从而获得所需的时延和时延率观测值。

(三)空间 VLBI 技术

为了提高VLBI技术的分辨能力，国际上从1970年开始提出了空间VLBI的概念，以及建立空间VLBI系统的各种设想。到了1980年空间VLBI在理论和技术实现上已比较成熟。1997年人类历史上的第一颗空间VLBI卫星(VSOP)在日本发射成功。虽然空间VLBI是为天体物理学研究而提出来的，但从概念上讲，它比地面VLBI有更大的优势应用于大地测量等领域，因此它必将成为大地测量的一种更加有效的观测技术。

从VLBI的原理来说，空间VLBI与地面VLBI没有什么不同，空间VLBI站可视为地面VLBI网向空间延伸的一个组成部分，它与地面天线的作用一样，用于接收射电源发出的信号并与地面天线所接收的信号进行相关处理，获得各种科学研究所需的观测数据。但由于将天线放置在空间，使得它在技术实现上与地面VLBI有所不同，其主要特点是：

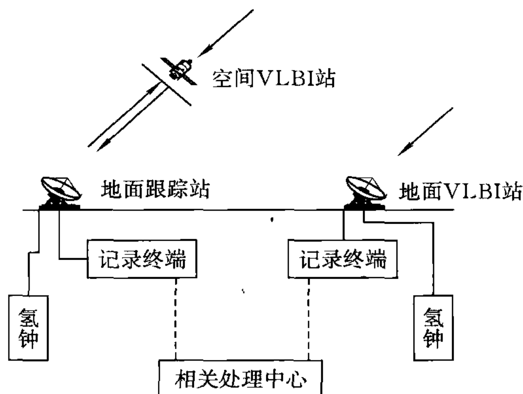


图2-16 空间VLBI系统

(1)空间站本振的相位锁定在地面跟踪站的氢脉冲频标上，这个频标由跟踪站通过一条向上无线电通道发送给空间站。

(2)空间站接收到的射电信号以及其他数据通过一条向下无线电通道发回给地面跟踪站。

(3)空间站上必须配备高精度的天线姿态调整、轨道控制和检测系统。

(4)空间站的能源是通过接收太阳能来提供的。

(5)须有全球覆盖的、能与空间站保持不间断通信的地面支持系统。图2-16为空间VLBI系统的示意图。

空间 VLBI 应用于大地测量在技术上一个最显著的优势就是将地面 VLBI 的几何测量变为动力测量。在前面已经指出，由两个地面 VLBI 站组成基线进行的测量，从大地测量的角度来看是几何测量，只能测定两站的相对位置，而不能独立测定地心坐标。引入空间 VLBI 后，由于它的轨道是在地心坐标系中描述的，其运动受到各种地球动力学因素的影响，这样通过空间站与地面站组成基线时便可形成一个动力测量系统，从而直接测定出地面站的地心坐标。由于世界上所有的 VLBI 天线都将参加空间 VLBI 的观测，所以可利用空间 VLBI 技术本身独立地建立一个完整的地球参考系。因为空间 VLBI 站不仅能作为地面上各种人卫跟踪站的被观测体，而且它本身也将作为人卫轨道上的一个空间观测站，直接观测河外射电源，从而能实现人卫动力学参考系与射电源参考系的直接连接和统一。除此之外，借助于空间 VLBI，就可在 VLBI 技术的内部建立起协议地球参考系与天球参考系的转换，从而形成一个统一的天球和地球参考系统（即有公共定义的原点、统一的旋转和尺度系统）。这种坐标系统的统一对大地测量及相关领域的研究是很有意义的。

四、卫星测高

20 世纪 80 年代，随着计算机技术、空间技术和卫星遥感遥测技术的应用和发展，产生了卫星测高（SA）技术。它利用卫星上装载的微波雷达测高仪、辐射计和合成孔径雷达等仪器，实时测量卫星到海面的距离、有效波高和后向散射系数，并通过数据处理和分析，来研究大地测量、地球物理和海洋学方面的问题。

由于卫星测高技术可测定海洋大地水准面，解算海洋部分的重力异常，以弥补海洋地区重力测量资料的空白，因此对建立高精度、高分辨率的地球重力场模型具有重要作用。美国大地测量委员会指出：海洋测高卫星 Seasat 在三个月内所做的工作相当于用海洋重力测量花费 200 年的时间和 20 亿美元的工作量。此外，卫星测高资料也可用于海洋学研究，如测定洋流的宽度、边界及运动速度、潮汐起伏及海面地形等。

（一）基本原理

卫星测高是以卫星为载体，由其上装载的微波雷达测高仪向海面发射微波信号，该雷达脉冲传播到达海面后，经过海面反射再返回到雷达测高仪。根据回波理论，返回到卫星后可以得到三种观测量。

（1）雷达脉冲行程于卫星—海面—卫星的往返时间：卫星高度的测量值。

（2）回波信号的波形：包括回波信号的前沿上升区、平顶区及后沿衰减区。

（3）回波信号的幅度：信号的自动增益控制值。对回波信号的波形和结构、回波信号的往返时间进行分析，就可以得到海平面高、海面倾斜、海流、有效波高、海面后向散射系数及风场等信息。

在卫星测高技术中，卫星被作为一个移动平台，平台上的雷达测高仪将微波脉冲发送到地面，并接收从地面反射回来的信号。设卫星在地球表面的高度为 a，信号传播速度为 c，则可以根据观测到的雷达信号往返传播时间 Δt 计算出

$$a = c\,\frac{\Delta t}{2} \tag{2-22}$$

由于水有良好的反射特性，所以这一方法特别适用于海洋。雷达信号可以在瞬间辐射海面上半径为几公里的环形区域内（通常称为信号的“足迹”），环形区的大小与入射微波束的空

间分辨率有关。因此，观测值是相对一平均瞬时海面的高程，它与大地水准面高的差值为 $\overline{H}$ 。设卫星相对于参考椭球面的高度为 h ，它可根据卫星相对于地心参考系的轨道计算推导出来，如果忽略有关的附加改正，则可得出简化的卫星测高基本方程为

$$h = N + \overline{H} + a \tag{2-23}$$

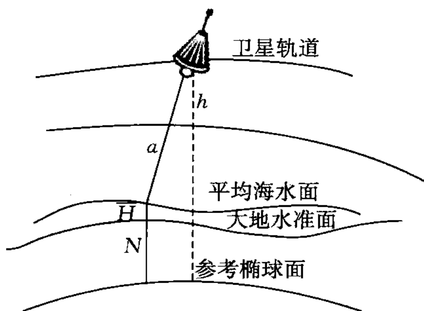


图 2-17 卫星测高的基本原理

图 2-17 表明，雷达测高仪可以用来直接扫描海面，从而也可近似地扫描海洋大地水准面。因此，卫星测高是直接绘制大地水准面图的有效方法，其重要性主要在于它能在相当短的时间内扫描很大的海洋区域，而且能以很高的时空分辨率确定出一个详细的海面表达式。$\overline{H}$ 对于建立大地水准面而言，意味着是一种干扰（噪声），而对于海洋动力学研究则构成了一种观测的信号，可通过对 $\overline{H}$ 的大量分析，能对洋底结构和海底下方的构造特点有重要的了解。

（二）卫星测高仪及工作原理

卫星测高仪是一种星载的微波雷达。它通常由发射机、接收机、时间系统和数据采集系统组成。一般采用 13.9 GHz 的发射频率，发射功率达到 2 kW，作用距离达到 800 km。雷达天线采用直径为 0.6～1 m 的抛物线型天线。为了同时保证测量精度、分辨率以及作用距离等指标的要求，发射的雷达脉冲必须具有较大的时频宽度，于是采用了脉冲压缩技术进行发射和接收。压缩后的脉冲宽度可以达到纳秒级（10^{-9} s）。也就是说脉冲压缩技术解决了无线电理论中脉冲的时域和频域宽度不能同时做很大的矛盾。脉冲的时、频宽之积称为压缩比。

测高仪的工作原理：发射机通过天线以一定的脉冲重复频率（PRF）向地球表面发射调制后的压缩脉冲，经海面反射后，由接收机接收到返回的脉冲，并测量出发射脉冲与接收脉冲的时间差。根据此时间差及返回的波形，便可以测量出卫星到海面的距离。由于卫星发射的雷达波束宽约为 1°左右，所以到达海面的足迹半径为 3～5 km。因此，测高仪测得的距离相当于卫星到这个半径为 3～5 km 圆形面积内海面的平均距离。在此基础上，还必须进行仪器校正、海面状况改正、对流层折射改正、电离层效应改正以及周期性海面影响改正等。

（三）测高观测量及误差分析

式(2-23)给出了测高仪器的简明观测方程，在实际应用中需对其进行精化。图 2-18 反映了卫星测高的几何学关系，由此可得

$$h = N + H + \Delta H + a + d \tag{2-24}$$

式中，h 仍为根据轨道计算的测高仪卫星的椭球高；N 为大地水准面高；H 为海面地形（高）；ΔH 为瞬间潮汐效应（值）；a 仍为测高仪的观测值；d 为计算的轨道与真实的轨道之差。

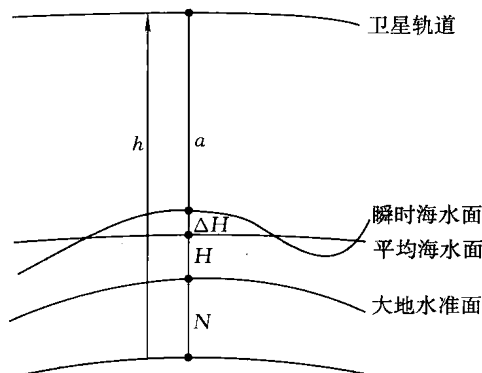


图 2-18 卫星测高的几何关系

$H + \Delta H$ 等于式(2-23)中的 $\overline{H}$。测高仪的观测量 a 应作大气影响的改正，这一改正应参照卫星的质量中心。大地水准面和平均海面间的差称为海面地形，其差可达 1～2 m。平均海平面被定义为不随时间变化的静止海面，海平面与大地水准面之差是海水的含盐度、大范围的气压差及强潮流等的不同引

起的。对于优于 2 m 的分辨率，用平均海洋面来逼近大地水准面的方法已不再有效，而要把与各种验潮结果结合在一块的高程系统连续起来，也会有很多的困难。

测高观测量中所包含的误差和改正项主要有三类：真实轨道与计算轨道之差（轨道误差）；信号传播路径上的影响；瞬间海面与大地水准面之差。

轨道误差主要是由下列原因引起的：用于轨道计算的地球重力场模型的精度；跟踪站的坐标误差；跟踪系统的误差或局限性；轨道计算中的模型误差。其中最主要的影响来自于地球重力场。由于每颗卫星只对球谐系数的某一子集特别敏感，因此对于特定卫星的观测量来研制特定的重力场模型是很有效的方法。例如将 GEM10 重力模型用于 GEOS-3 测高卫星，就使其轨道精度从 10 m 提高到 1～2 m。跟踪系统是影响轨道精度的第二个重要的因素。为获得高精度的轨道，应采用全天候无线电跟踪系统。跟踪站的地心坐标也应采用激光测卫、多普勒、VLBI、GPS 等技术精确测定，并随着新的观测量的增加而不断改善，目前的精度达到了几个厘米。即使如此。剩余的轨道误差仍比测高仪的精度大得多。因此，必须改进轨道计算模型、应用一些非动力学的方法等。

信号路径上的影响可分为仪器误差和传播误差。最主要的仪器影响包括：雷达天线相位中心和卫星质量中心之间的距离；测高仪电子线路中的传播延迟；测量系统中的计时误差等。在制造测高仪器时，可将这些影响减小到最低程度并可以估算。仪器误差的全部影响应在精度勘测过的试验区内进行测高仪标定时加以测定和控制。信号传播误差是由电离层折射引起的为 5～20 cm，这取决于电离的强度，其影响可以用双频来改正。对流层折射的影响大约是 2.3 m，因为只使用了垂直方向上的观测量，其影响可以用适合的大气折射模型很好地加以改正，精度可达到几厘米。传播误差中还包括实际海况对反射信号的影响。

瞬时海面与大地水准面的偏差可分为不随时间变化的 H 部分以及随时间变化的 ΔH 部分。在用测高观测量确定平均海面之前，应先对随时间变化的分量加以改正。由波浪引起的海面变化已在测高仪观测过程中被平滑掉了，可以忽略不计。因此要考虑的改正项主要是因潮汐等而引起的海面变化。

§2-4　重力测量

一、绝对重力测量

绝对重力测量是指能直接测定一点重力值（实际上是指一点的重力加速度）的测量技术。绝对重力测量有两种方法，一种是利用可倒摆测定；另一种是运用物体的自由落体运动测定，这里仅介绍后一种方法。

所谓自由落体运动是指物体在只受重力作用下沿垂线所作的加速直线运动。根据力学知识，假定在运动路程中的重力加速度 g 为常数，则其运动方程为

$$l = l_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \tag{2-25}$$

式中，V_0 和 l_0 分别为在计算时刻（$t = 0$）落体的运动速度和离路程起算点 O 的距离，l 为经 t 时间段后落体离 O 点的距离，见图 2-19。

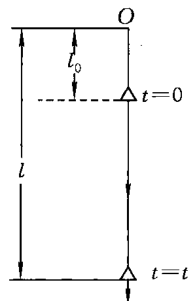


图 2-19　物体的自由落体运动

运用物体的自由落体运动测定重力值可以用两种方法来实现：自由下落（简称下落法）和对称自由运动（简称上抛法）。下面分别叙述它们的原理。

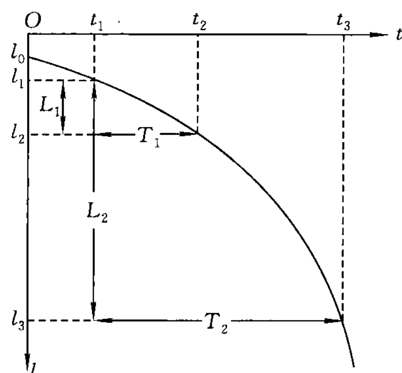


图 2-20 下落法测定重力

（一）下落法

从式（2-25）看出，要避免测定 V_0 和 l_0，至少要在三个位置上进行观测。设在时刻 t_1、t_2 和 t_3 落体与 O 点的距离分别为 l_1、l_2 和 l_3，图 2-20 给出了运动情况的图解，横轴表示时间，纵轴表示路程。由式（2-25）可以对每一时刻写出一个方程

$$l_1 = l_0 + V_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$$

因而有

$$l_2 = l_0 + V_0 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$l_3 = l_0 + V_0 t_3 + \frac{1}{2} g t_3^2$$

将第二式和第三式分别减第一式得到

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= V_0 T_1 + \frac{1}{2} g T_1 (t_1 + t_2) \\ L_2 &= V_0 T_2 + \frac{1}{2} g T_2 (t_1 + t_3) \end{aligned}\right\} \tag{2-26}$$

式中，$L_1 = l_2 - l_1$ 和 $L_2 = l_3 - l_1$ 分别为第一位置至第二和第三位置的距离；$T_1 = t_2 - t_1$ 和 $T_2 = t_3 - t_1$ 分别为落体由第一位置运动至第二和第三位置所用的时间。为了消去 V_0，将式（2-26）的两个式子分别除以 T_1 和 T_2，再相减，得到

$$\frac{L_1}{T_1} - \frac{L_2}{T_2} = \frac{1}{2} g (t_2 - t_3)$$

因为

$$t_2 - t_3 = T_1 - T_2$$

最后得到 g 的计算式

$$g = \frac{2}{T_2 - T_1} \left(\frac{L_2}{T_2} - \frac{L_1}{T_1} \right) \tag{2-27}$$

由此可见，利用下落法测定重力需要测定在两个时间段（T_1 和 T_2）内物体下落的距离 L_1 和 L_2。

（二）上抛法

它是将物体垂直上抛然后再自由下落。为了求得重力加速度 g，需在物体运动途径上先取两个位置 S_1 和 S_2，分别测定落体两次通过每一个位置时的时间间隔 T_1 和 T_2。图 2-21 给出情况的图解，横轴表示时间，纵轴表示落体的垂直位置。设 H_1 和 H_2 分别为两个观测位置与落体运动的最高点的距离，依据式（2-25）可以写出（这里 $l_0 = 0, V_0 = 0$）

$$H_1 = \frac{1}{2} g \left(\frac{T_1}{2} \right)^2$$

$$H_2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{T_2}{2} \right)^2$$

用 H 表示两个位置之间的距离，则有

$$H = H_1 - H_2 = \frac{1}{2}g\left[\left(\frac{T_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{T_2}{2}\right)^2\right]$$

整理后可得计算 g 的公式

$$g = \frac{8H}{T_1^2 - T_2^2} \tag{2-28}$$

由此可见，用上抛法测定重力需要测定物体上升和下落两次分别通过相距 H 的两个位置的时间间隔 T_1 和 T_2。

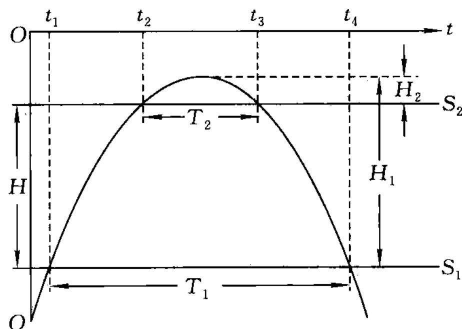


图 2-21　上抛法测定重力

二、相对重力测量

相对重力测量是先测定两点之间的重力差，然后通过至少一个已知重力值的点，逐点推求各点重力值的测量技术。

进行相对重力测量的静力法是利用一种力（例如弹簧的弹力）来平衡物体所受的重力，重力的变化将引起平衡位置（弹簧位置）的变化，只要测出平衡位置的变化（弹簧的升缩量），就可算出重力的变化（运用虎克定律），也就是测定了两地的重力差。

目前常用的重力仪基本上都是以弹簧的弹力来平衡重力，这些重力仪称为弹簧重力仪。例如我国北京地质仪器厂制造的 ZSM 型石英弹簧重力仪和美国的拉科斯特（LCR）金属弹簧重力仪，它们都是由弹性系统、光学系统、测量机械装置、仪器面板及保温外壳等组成。ZSM 测量重力差范围为 80～120 mGal（10^{-5} m/s^2），测量精度一般在 0.1～0.3 mGal 之间。LCR 重力仪又分为 G 型和 D 型，G 型的直接测量范围可达 7 000 mGal，用它可在全球范围内进行相对重力测量，测量精度可以达到 20 mGal。D 型的直接测程只有 200 mGal，一般用于局部地区的重力普查，其测量精度略高于 G 型。

三、航空重力测量

航空重力测量是以飞机为载体，综合应用重力仪、GPS、测高仪以及姿态确定设备测定近地空间重力加速度的重力测量方法（见图 2-22）。它能够在一些难以开展地面重力测量的特殊地区，如沙漠、冰川、沼泽、原始森林等地进行作业。可以快速、高精度、大面积及分布均匀地获取重力场信息。它较之经典的地面重力测量技术，无论是测量设备、运载工具、测量方法，还是数据采集方式、数据归算理论等，都截然不同。充分体现了当代高新技术在大地测量领域的综合应用，对大地测量学、地球物理学、海洋学、资源勘探以及空间科学等都具有非常重要的意义。

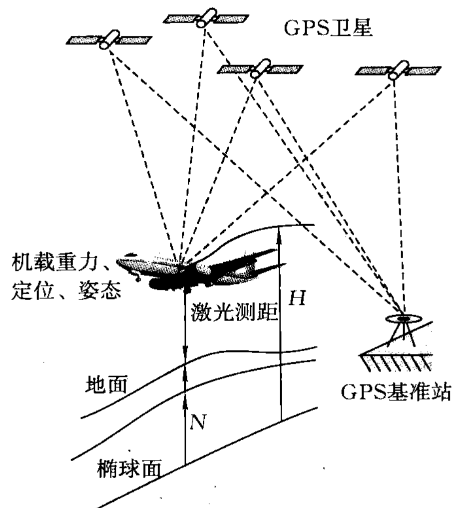


图 2-22　航空重力测量原理

国际上首次航空重力测量试验是 1958 年进行的，由于导航手段的精度很低而无法保证飞机垂直扰动加速度的测定精度优于 10 mGal，故直到 20 世纪 70 年代末，航空重力测量技术的发展实际上处于停滞状态。

GPS技术的问世,特别是厘米级动态差分GPS的实现,使得以毫伽级精度分离作用于运动载体上的重力和非重力成为可能。航空重力测量可以分为标量法和矢量法两种,前者仅能测定重力加速度的大小,而后者可同时测定重力异常和垂线偏差。目前航空矢量重力测量技术仍处在攻关研制阶段,而航空标量重力测量因只需测定沿某一固定轴方向的重力大小,观测信息简单,相对较易实现。本节将重点介绍航空标量重力测量技术的基本原理、系统配置和数据处理方法等。

(一)航空重力测量的基本原理

航空重力测量的基本原理是利用飞机携带的机载重力仪测出飞行剖面各时刻相对于地面基准重力点的重力变化,然后算出各扰动改正项并通过一定的数据处理方法推算出相应时刻空中点的重力加速值,最后采用延拓方法将其归算为地面点的重力值。航空重力测量是相对重力测量,即在飞机起飞前,应当与地面已知重力点进行联测。其基本的数据模型为

$$\Delta g_h = g_b + \delta g - A_v - A_E - A_h + 0.308\,6H - \gamma_0 \tag{2-29}$$

式中,Δg_h 是高程 H 处的空间点的重力异常;g_b 为地面重力基准点的重力值;δg 为机载重力仪实测的相对于 g_b 重力变化;A_v 为飞机垂直加速度改正;A_E 是厄特弗斯改正;A_h 为水平加速度倾斜改正;γ_0 表示观测点在参考椭球面上的正常重力值(参见§4-1);$0.308\,6H$ 为正常重力的空间改正。

飞机的垂直扰动加速度 A_v 主要是飞机的垂直运动和机身自震造成的,机身自震以高频为主,可采用低通滤波器和重力仪敏感元件的强阻尼等方法消除;飞机的垂直运动则采用连续测量其飞行的高度,通过适当的计算方法来修正。测定飞行高度变化在海面上比较容易实施,直接用测高仪测定飞机到海水面的变化即可;但在陆地上,测高仪测量的是飞机至地面高度的变化,因此要推求飞机的高度变化,还须同时已知航线上的地形高度变化。

众所周知,重力是地球质量的万有引力与地球自转产生的离心力的合力。当在运动的载体上测量重力时,载体速度与地球自转速度合成而使离心力产生变化,这种变化即为厄特弗斯改正,其计算公式为

$$A_E = \left(1 + \frac{H}{R}\right)\left(2\omega V \sin A \cos\varphi + \frac{V^2}{R}\right) \tag{2-30}$$

式中,H 为飞行高度;R 为地球平均半径;V 为载体运动速度;A 代表运动方位角;ω 为地球自转角速度;φ 是测点的地心纬度。

我们知道,观测重力时,重力仪与水准面应严格平行。在航空重力测量中,如果重力仪平台与水准面不严格平行,则除了对重力加速度产生影响外,还对水平加速度的垂直分量产生影响,这种影响称为水平加速度倾斜改正。设 g 为实际重力值,g_t 为重力仪实测值,θ 是平台平面与水准面倾角,A_e 表示横向水平加速度,则水平加速度倾斜改正可表示为

$$A_h = g(\cos\theta - 1) + A_e \sin\theta \tag{2-31}$$

由上式可以分析,当 $A_e = 500\ \text{mGal}$,$\theta \leqslant 3.4'$ 时,A_b 可小于1 mGal。由于陀螺平台水平精度达 $0.2'$,故此项改正通常可以忽略,相应的误差小于0.05 mGal。

(二)航空重力测量系统

航空重力测量系统是由现代重力传感器、卫星定位、惯性和精密测高等技术集合而成的,主要由以下五个分系统组成。

(1)重力传感器系统。它主要包括机载重力仪和平台。机载重力仪应有足够的动态范围，能测出随飞机起飞和着陆过程中产生的巨大短时加速度等信息，以便计算各类重力扰动改正项。

(2)动态定位系统。该系统的主要作用是采用GPS技术来保证最佳的实时导航，提供初始轨道和精密的位置信息，计算与载体运动有关的加速度。实时导航仅用伪距测量即可，为获得精确的飞行轨迹，则需综合利用伪距、相位及多普勒观测信息。

(3)姿态传感器系统。飞机的飞行姿态通常以俯仰角、横滚角和方位角来表示，并由惯性测量设备来获取。由于惯性测量设备价格昂贵、漂移较大、难以维护等缺陷，近年来发展了测量姿态精度高、无漂移、价格低的GPS姿态测定设备。

(4)高度传感器系统。该系统的主要作用是采用微波测高仪、雷达测高仪、气压测高仪或GPS测高技术等提供用于计算厄特弗斯改正、空中重力异常归算至地面改正的高程信息。

(5)数据采集处理系统。它包括机载数据采集设备和地面数据处理设备。机载设备用于同步记录重力传感器、导航定位、姿态及测高各分系统的输入数据，要求记录的每组数据均带有精确统一的时标，以便于地面设备计算处理。

四、卫星重力测量

卫星重力测量的主要手段有：地面跟踪卫星，卫星跟踪卫星(SST)，卫星重力梯度测量(SGG)和卫星测高(SA)。

(一)地面跟踪卫星测定地球重力场

如SLR、DORIS、PRARE，地面跟踪卫星的观测量主要包括：地面跟踪站至卫星方向、距离、距离变化率、相位等。根据这些观测数据，可以建立卫星轨道与地面跟踪站之间的几何和物理的函数关系，而卫星轨道是地球重力场等摄动因素的隐函数，由此可以推算地球重力场。

(二)卫星跟踪卫星测量地球重力场

卫星跟踪卫星技术可以分为高低卫星跟踪(SST-hl)和低低卫星跟踪(SST-ll)两大类。SST-hl利用低轨卫星(LEO，高度400 km左右)上的星载GPS接收机与GPS卫星星座(高度21 000 km左右)构成高低卫星的空间跟踪网，测定低轨道卫星的3维位置、速度和加速度，即重力位的一阶导数。SST-ll利用两个相距200～400 km的相同卫星，对两者之间的相对运动，即卫星间的距离变化用微波干涉仪及其精密的测量，利用星间距离变化率，确定地球引力场的系数。

德国的CHAMP(Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Application)卫星采用SST-hl跟踪模式，如图2-23所示。CHAMP卫星于2000年7月升空，计划运行5年，轨道高度为418～470 km。CHAMP的科学任务之一是测定地球重力场中长波的静态部分和时间变化变化。

GRACE(Gravity Recovery and Climate Experiment)卫星由美国和德国联合开发，采用SST-hl和SST-ll组合跟踪模式，如图2-24所示。GRACE卫星于2002年3月升空，计划运行5年。GRACE的科学任务之一是精确测定中长波地球重力场的静态部分，并以2～4周的周期分析和测定地球重力场的变化。

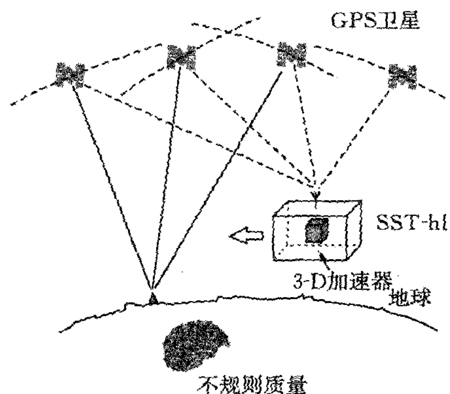


图 2-23 SST-hl 跟踪模式

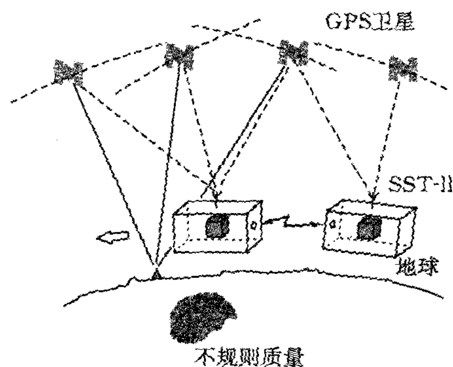


图 2-24 SST-ll 跟踪模式

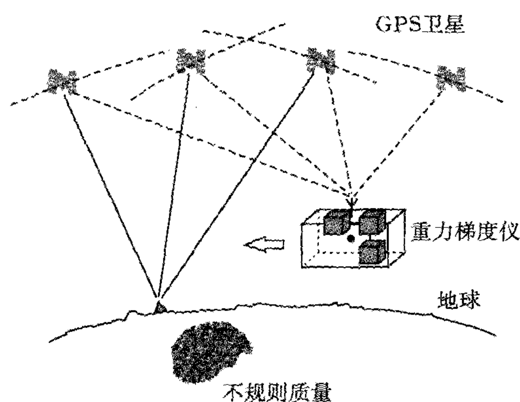


图 2-25 SSG 模式

（三）卫星重力梯度测量

卫星重力梯度测量是利用卫星内一个或多个固定基线（大约 70 cm）上的差分加速度计来测定 3 个互相垂直方向的重力加速度差值，测量到的信号反映了重力加速度分量的梯度，即重力位的二阶导数。非引力加速度（例如空气阻力）以同样的方式影响卫星内所有加速度计，取差分可以理想地被消除掉。它的任务之一是以更高时空分辨率探测地球重力场及其变化。

欧空局于 2009 年 3 月发射了第三颗重力探测卫星，即 SSG 模式（如图 2-25 所示）的 GOCE（Gravity and Ocean Circular Exploration）卫星。

第三章　测绘基准与大地控制网

测绘地球表面上各种地形、地物及点位的坐标和高程，必须要有相应的测量参考点（称为基准点）和参考面（称为基准面），即测绘基准，它们是测绘成果的起算依据。测绘基准主要由大地基准（本书称为坐标基准，包括水平坐标基准、三维坐标基准）、高程基准、深度基准和重力基准等构成。测绘基准为各种测绘工作提供起算数据，是确定地理空间信息的几何形态和时空分布的基础，是在数据空间里表示地理要素在真实世界的空间位置的参考基准。测绘基准的建设任务包括确定和定义坐标系统、高程系统和重力参考系统，建立和维持坐标框架（水平控制网、卫星大地控制网）、高程框架（高程控制网）和重力测量框架（重力控制网）。

经典水平坐标基准和高程基准是采用经典大地测量方法实现的，其控制范围有限，只能作为区域性的基准，一般情况下只适用于某一个国家范围内。三维坐标基准和重力基准既可以作为全球性基准又可以作为区域性基准。各种基准是通过一系列控制点的点位坐标、高程及其重力值来体现的，具体地说，是通过建立不同的大地控制网来实现的，水平控制网、高程控制网、卫星大地控制网、重力控制网分别实现了水平坐标基准、高程基准、三维坐标基准和重力基准的延伸。

本章主要讨论测绘基准问题及建立大地控制网的方法、原则和布网方案等问题。

§3-1　水平坐标基准与水平控制网

水平坐标基准是由一系列大地控制点的水平坐标实现的，它是确定地面点、水平坐标的基础，通常是通过建立水平控制网的方法来实现。

一、大地原点与水平坐标基准

（一）大地原点

大地原点是国家水平控制网中推算大地坐标的起算点。在国家大地网中选一个比较适中的点，在该点上高精度测定它的天文经纬度及其到另一个点的天文方位角，根据参考椭球定位的方法，求得该点的大地经纬度、大地高和到另一测量点的大地方位角，这些数据称为大地基准数据，该点就是大地原点。有关参考椭球及定位的概念将在后面的章节介绍。

我国 1954 年北京坐标系的大地原点在苏联普尔科沃天文台。20 世纪 70 年代，我国决定建立自己独立的大地坐标系统，即 1980 年国家大地坐标系。通过实地考察、综合分析，最后将我国的大地原点，确定在陕西省泾阳县永乐镇石际寺村境内，具体坐标为：34°32′27.00″N，108°55′25.00″E，于 1978 年建成。我国大地原点的整体设施，由中心标志、仪器台、主体建筑、投影台四大部分组成。其中，高出地面 26 m 的立体建筑共 7 层，顶层为观察室，内设仪器台。整体建筑的顶部，是由玻璃钢制成的半圆形屋顶，采用电控自动启闭，以便进行天文观测（如图 3-1 所示）。大地原点的中心标志埋设于主题建筑的地下室中央，该标志采用红色玛瑙石制成，直径 10 cm，精美而坚固（如图 3-2 所示）。



图 3-1 大地原点的外观



图 3-2 大地原点的标志表面

(二)水平坐标基准

水平坐标基准是建立国家大地坐标系统和推算国家水平控制网中各点大地坐标的基本依据，它包括一组起算数据，即指国家大地控制网起算点(即大地原点)的大地经度、大地纬度和至相邻点方向的大地方位角。

水平坐标基准由一系列控制点构成水平控制网来实现。控制点的坐标由大地原点起算，通过导线测量、三角测量等经典大地测量方法推算得到。在现代大地测量中，水平坐标基准一般由 GPS 方法实现(见 § 3-3)。

二、建立水平控制网的方法

经典的大地测量技术在测定地面点的水平坐标和其高程时所采用的方法是不同的，例如三角测量法、导线测量法等只能获得地面点的水平二维坐标 (x,y) 或 (L,B)，地面点的高程 H 只能通过水准测量或三角高程测量获得。由于水平坐标和高程的测定在原理和方法上均有本质区别，无法将它们统一，因而常规大地控制网的建立是将水平控制网与高程控制网分离独立进行建立的。水平控制网确定了地面点的水平基准，高程控制网确定了地面点的高程基准。这种分别由两套系统建立的控制网也称为“2＋1”维网，该方法目前仍在生产中使用。现在大地测量中，水平控制网一般由 GPS 方法建立。下面先介绍经典水平控制网的建立，在 § 3-2 中介绍高程控制网的建立，在 § 3-3 中介绍 GPS 控制网的建立。

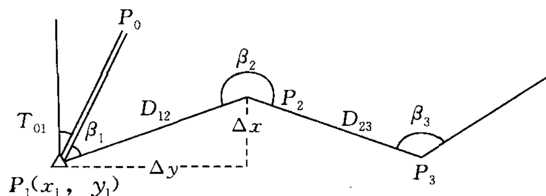


图 3-3 导线测量法

(一)导线测量法

在地面上选定相邻点间互相通视的一系列大地控制点 P_1、P_2、P_3… 连成一条折线，称为导线，如图 3-3。在导线点上测量相邻点间的边长和点上的角度，并把这些边长和角度都化算到平面上。设 D_{12}、D_{23}… 为各导线的平面边长，β_i 为各导线点上的转折角。若已知 P_1 点的平面坐标为 x_1、y_1，P_1P_0 的坐标方位角为 T_{10}。从 T_{10} 起可逐次推得各导线边的坐标方位角，即

$$
\begin{aligned}
T_{12} &= T_{10} + \beta_1 \\
T_{23} &= T_{12} + 180^\circ + \beta_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

根据这些方位角和各边边长，由 P_1 点的坐标开始，可推算其他各导线点的坐标，有

$$P_2:\quad \begin{aligned} x_2 &= x_1 + D_{12}\cdot\cos T_{12} \\ y_2 &= y_1 + D_{12}\cdot\sin T_{12} \end{aligned}$$

$$P_3:\quad \begin{aligned} x_3 &= x_2 + D_{23}\cdot\cos T_{23} \\ y_3 &= y_2 + D_{23}\cdot\sin T_{23} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

这就是用导线法建立水平控制网的基本原理。

(二)三角测量法

在地面上选择一系列点 P_1、P_2、P_3… 使它们与周围相邻的点通视并按三角形的形式连接起来构成三角网，如图 3-4 所示。测定 P_1P_2 边的长度和方位角，作为网的起算边长和起算方位角，观测网中各三角形的角，把边长和这些角度化算到平面上。设 P_1 点的已知坐标为 x_1、x_2，P_1P_2 的平面边长和平面坐标方位角分别为 D_{12} 和 T_{12}，各观测角 A_i、B_i、C_i。由 P_1P_2 边始可以推得全网各边的边长和坐标方位角。有

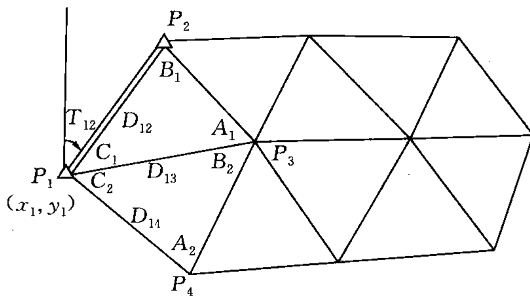


图 3-4　三角测量法

$$D_{13} = D_{12}\frac{\sin B_1}{\sin A_1},\quad T_{13} = T_{12} + C_1$$

$$D_{14} = D_{13}\frac{\sin B_2}{\sin A_2},\quad T_{14} = T_{13} + C_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

根据这些边长和方位角就可推算全网点的坐标。即

$$x_3 = x_1 + \Delta x_{13} = x_1 + D_{13}\cos T_{13}$$

$$y_3 = y_1 + \Delta y_{13} = y_1 + D_{13}\sin T_{13}$$

$$\vdots$$

这就是用三角测量法建立水平控制网的基本原理。

(三)三边测量法和边角同测法

三边测量法的结构和三角测量法一样，但只测量网中所有三角形边长，各内角则通过计算求得。如果在测角网基础上加测部分边长或全部边长，则称为边角同测法或边角全测法。

三、国家水平控制网的布设原则

国家水平控制网是一项基本建设工程，需要从国家的实际情况出发，根据布网理论和实际经验，正确处理质量、数量、时间和经费之间的关系，拟定出具体原则，作为布设大地控制网的依据。

(一)分级布网逐级控制

国家水平控制网可以采用一个等级的布设方法，也可采用多级布设的方法。对于领土不大的国家通常布设一个等级的控制网，可以使全网精度均匀，平差计算工作量不大，且可直接作为测图控制基础。而对于领土广阔的国家常采用从高到低分级布设的方法，先在全国范围内布设精度高而密度较稀的首级控制网，作为统一的控制骨架。再根据各个地区建设的需要，分期分批逐次加密控制网，各级控制网的边长逐级缩短，精度逐级降低。这种布设方法是在统

一的坐标系骨架中，按不同地区有先有后地布设其余各级三角网，这既能满足精度需要，又能达到快速、节约的目的。

我国国家水平控制网分为四个等级，先以高精度较稀疏的一等三角锁，纵横交叉布满全国，形成统一坐标系的骨干网。然后根据实际需要，在不同地区分期分批地布设二、三、四等水平控制网。

(二)应有足够的精度

国家水平控制网在建立过程中，一、二等网除作为国家统一坐标的控制骨架外，还要满足基本比例尺地形图的测图需要和现代科学技术发展的需要，如航天技术、精密工程、地震监测、地球动力学等。而三、四等水平控制网主要用于地形图图根点的高一级控制和基本工程建设的需要。因此各等级控制点的精度必须要满足实际需要。如一、二等大地控制点其精度应该满足1∶5万基本比例尺地形图的需要，而三、四等控制点点位精度应满足1∶1万地形图测图的需要。

(三)应有必要的密度

控制网点的密度以平均若干平方千米一个点来表示，也可用控制网中间点的平均边长表示。网中边长愈短，大地点的密度就愈密。每点控制的面积Q用平均边长S来表示，即

$$Q = S^2$$

$$S = \sqrt{Q} \tag{3-1}$$

上式是边长与控制面积的近似关系式。

国家控制点的密度必须满足测图要求，而测图比例尺和成图方法的不同，对点的密度要求也不同。一般要求每个图幅平均有3～4个大地点，以满足加密控制点的需要。而对于不同的工程建设，可能对点的密度要求不同，应根据实际情况而定。

(四)应有统一的规格

我国领土辽阔，建立国家控制网的任务相当繁重，需要花费巨大的人力、物力和财力，要有很多单位共同努力来完成。国家控制网基本建成后，各部门根据本单位的需要，还要对大地网的某些部分不断进行加强、改造和补充。为了避免重复和浪费，便于相互利用，必须有统一的布设方案和作业规范，使各测绘部门所测成果的精度、布设规格合乎要求，构成统一的整体，成为国家大地控制网的组成部分。有关布设的总体方案、预期的精度指标、基准选取等问题在大地测量法式中体现。具体实施方案、使用仪器、操作方法、限差规定和成果验收等问题在规范中规定。

四、国家水平控制网的布设方案

我国国家水平控制网在20世纪50年代建立时主要是以三角测量方法布设的，在困难地区兼用导线测量的方法，下面主要介绍各等级三角锁网的布设情况。

(一)一等三角锁系

一等三角锁系是国家首级三角网，其作用是在全国领土上迅速建立一个统一坐标系的精密骨架，以控制二等以下三角网的布设，并为研究地球形状大小和地球动力学等提供资料。控制测图不是直接目的，因此，着重考虑的是精度而不是密度。

一等三角锁一般沿经纬线方向交叉布设，如图3-5所示。两交叉处间的三角锁称为锁段，纵横锁段围成一周称为锁环，许多锁环构成锁系。锁段长约200 km，通常由单三角形组成，也

可包括一部分大地四边形或中点多边形。锁中三角形平均边长为 20～25 km，三角形的任一角不小于 40°，大地四边形或中点多边形的传距角要大于 30°。按三角形闭合差计算的测角中误差不大于±0.7″。

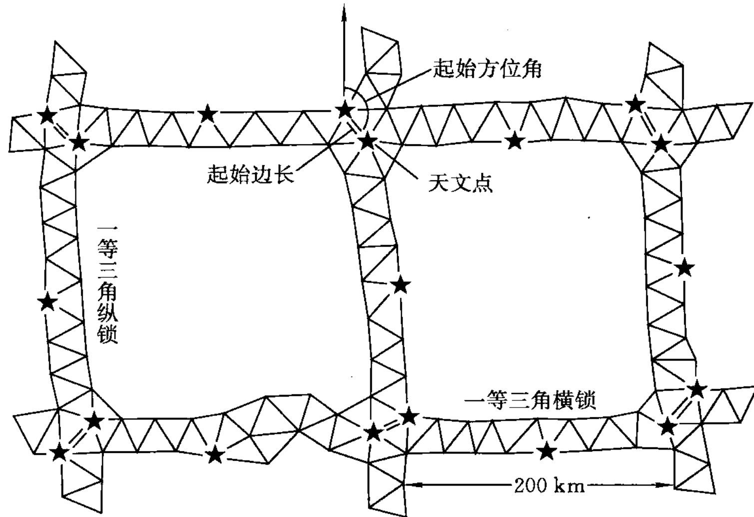


图 3-5　一等三角锁系

在锁段交叉处要测定起始边长，其相对精度不低于 1/350 000。在起始边两端点测定天文经、纬度和天文位角，并在锁中央一个点上测定天文经、纬度。天文经、纬度和天文方位角的测定中误差分别小于±0.3″和±0.5″。凡测定天文经、纬度的点都为计算垂线偏差提供资料。由于布设方案中要进行天文测量，所以，国家水平控制网又称为天文大地网。

(二)二等三角网

二等三角网布设在一等锁环所围成的范围内，它是加密三、四等网的全面基础，如图 3-6。二等网平均边长为 13 km，就其密度而言，基本上满足 1∶5 万比例尺测图要求。它与一等锁同属国家高级网，所以，主要应考虑精度问题，而密度只作适当照顾，其按三角形闭合差计算的测角中误差应小于±1″。在网中央布测一条起始边长和起始方位角，对于较大的锁环要加测起始方位角。网中三角形的角度不小于 30°，一等三角锁两侧的二等网应与一等锁边连接成连续三角网。

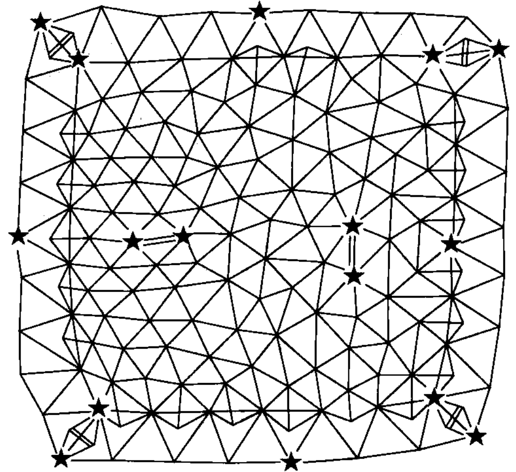


图 3-6　二等全面网

(三)三、四等三角网(点)

国家三、四等三角网(点)是在二等三角网基础上进一步加密，如图 3-7 和图 3-8 所示，它是图根测量的基础，其布设密度必须与测图比例尺相适应。三等三角网平均边长为 8 km，每点控制面积约 50 km²，基本上满足 1∶2.5 万测图需要。四等三角网平均边长为 4 km，每点控制面积约 20 km²，可满足 1∶1 万和 1∶5 000 测图需要。

三、四等点每点都要设站观测，由三角形闭合差计算测角中误差：三等应小于±1.8″；四等应小于±2.5″。

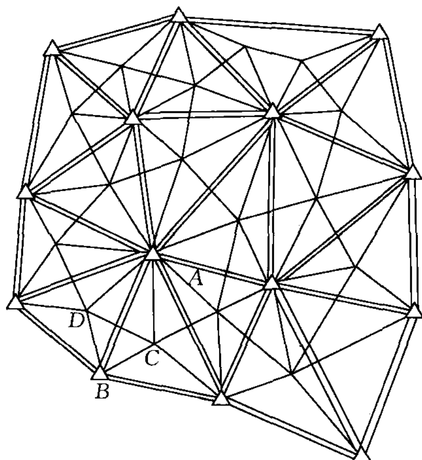
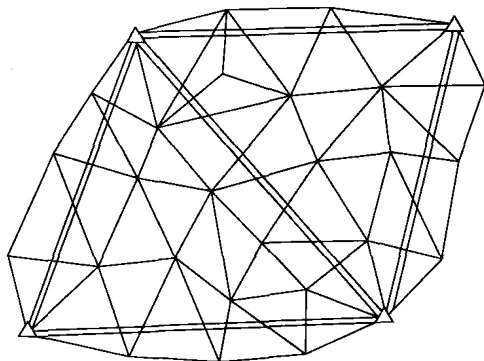


图 3-7　插点式三、四等网


图 3-8　连续式三、四等网

(四)导线控制网

虽然导线测量在控制面积,检核条件及控制方位角传算误差时不如三角测量,但是它具有布设灵活,推进迅速,易克服地形障碍等显著的优点。在 20 世纪 60 年代初,我国青藏高原大部地区就是采用导线法布设稀疏的一、二等控制网的。随着全站仪的普及,电磁波测距仪在提高精度、增大测程、减轻重量等方面的不断改进,使导线测量的应用越来越广。在低等控制网加密、用来代替三、四等三角网控制大比例尺测图中,导线测量就具有上述优点,另外,导线测量还是军事上阵地联测的重要方法。

导线测量的布设原则和三角测量布设原则基本相同,它也分为四个等级,各等级导线测角测边的精度要求,应使导线推算的各元素精度与相应等级三角锁网推算的精度大体一致。

一等导线一般沿主要交通干线布设,纵横交叉构成较大的导线环,几个导线环连成导线网。图 3-9 为导线布设示意图。一等导线网与邻接的三角锁要妥善连接,构成整体大地控制网。一等导线环周长一般在 1 000～2 000 km。二等导线布设在一等导线(或三角锁)环内,两端闭合在一等导线(或三角锁)点上,成附合形式。二等导线间也构成互相交叉的导线环,并连接成网。二等导线环周长一般在 500～1 000 km。一、二等导线边长可在 10～30 km 范围内变动。为了控制导线边的方位角误差和减少导线的横向误差,一、二等导线每隔 100～150 km,和它与一、二等三角锁网连接处,以及所有一、二等导线交叉处,需测定导线边两端点的天文经纬度和天文方位角,以求定该边的起始方位角。由于导线结构不及三角网强固,方位角传算误差积累较快,因此导线的起始方位角的间隔要小。两端有方位角控制的导线称为导线节,导线节要尽量布成直伸形式。导线网内两交叉点之间走向大体

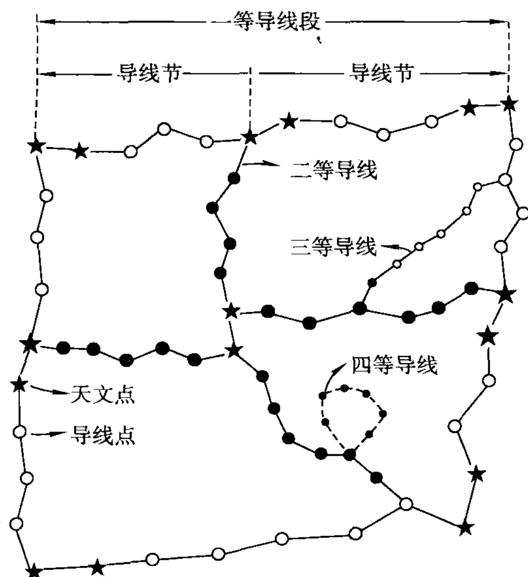


图 3-9　导线网

一致的若干导线节合称为导线段。方位角传算误差随边数增加而增大，因此一、二等导线每一导线节的边数不得多于 7 条。

三、四等导线是在一、二等导线网(或三角锁网)的基础上进一步加密，应布设为附合导线。单个附合导线总长三等不超出 200 km，四等不超出 150 km。布设几条附合导线时，应尽量连成网状，以增强导线结构。三、四等导线边长的选择，可根据测边测角仪器的性能以及所需大地点的密度而定，一般三等边长在 7～20 km 范围内变通；四等在 4～15 km 范围内变通；作业时应尽量采用较长的边。

(五)我国天文大地网简介

我国一等三角锁系和二等网合称天文大地网，是从 1951 年开始布设，于 1971 年完成。一等锁全长约 8 万公里，包括 400 多个锁段构成 100 多个锁环，共有 5 000 多个一等三角点，具体布设形状见图 3-10。1982 年完成了天文大地网整体平差工作，网中包括一等三角锁系、二等三角网、部分三等网和导线，有近 5 万个控制点，467 条起始边和 916 个起始方位角。共组成约 30 万个误差方程式和 15 万多个法方程式。平差结果表明，网中离大地原点最远点的点位中误差为±0.8 m，相邻点的相对精度大部分小于 1/200 000。

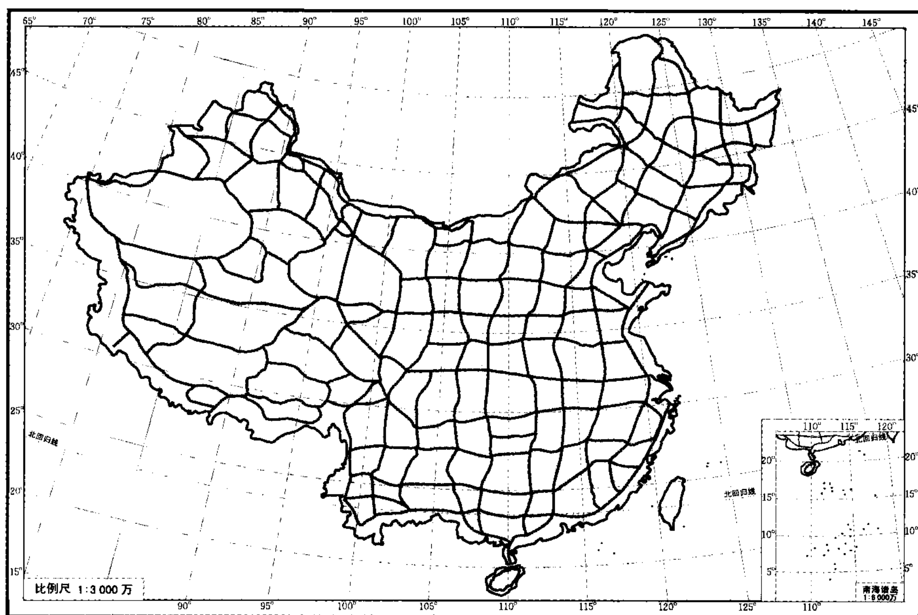


图 3-10　我国天文大地网

五、水平控制网布设

水平控制网布设包括：技术设计、实地选点、觇标建造、标石埋设、距离测量、角度测量和平差计算等主要步骤。这里仅简述前四部分的内容。

(一)对控制点点位的要求

不论是技术设计还是实地选点，水平控制网点的位置应满足下列要求：

(1)控制点间所构成的边长、角度、图形结构应完全符合《规范》的要求。

(2)点位要选在展望良好，易于扩展的至高点上，以便于低等点的加密。

(3)点的位置要保证所埋中心标石能长期保存，造标和观测工作的安全便利。因此，点位

应选在土质坚实而排水良好的高地上，离开公路、铁路、高压电线和其他建筑物有一定的距离。

(4)为保证观测目标成像的清晰稳定和减弱水平折光的影响，以提高观测精度，视线应尽量避免沿斜坡或大河大湖的岸线通过。视线要超越及旁离障碍物相应的距离：在山区一、二等方向应不小于 4 m、2 m；在平原地区一、二等方向应不小于 6 m、4 m。

(二)技术设计

1. 收集资料

在拟定计划前必须收集测区有关资料，包括：测区的各种比例尺地图、航空像片图、交通图和气象资料；已有的大地点成果；测区的自然地理和人文地理情况，交通运输和物资供应情况等。对这些资料加以分析和研究，作为设计的依据和参考。

2. 图上设计

图上设计是技术设计中的主要项目。图上设计应考虑得细致周密，这样在实地选点时就非常容易，否则会给野外作业带来困难。

图上设计的一般步骤和方法如下：

(1)把测区内的 1∶5 万或 1∶10 万地形图形拼接起来，在图上标绘出已布设的三角锁网、GPS 网、导线网和水准路线。

(2)依据对控制点点位的要求，并考虑布设最佳图形，从已知点开始逐点向外扩展。布点的基本步骤是由高等到低等、由已知点到未知点、由内到外逐点布设。

(3)按照《规范》对高程起算点的密度要求，拟订水准联测路线。对测区内旧有的网点应尽量利用，并提出联测方案。

(4)在选点时确保通视。对没有确实把握的点位或方向，应设计几套备用方案。

(三)实地选点

实地选点的任务是将图上设计的布网方案落实到实地，以对控制点点位的要求选定点的最适宜位置，并填写点之记或点位证明。

(四)造标和埋石

1. 造标

由于国家三角点或导线点之间相距较远，一般情况下直接看不到对方，因此常常要造大地觇标用来指示点的具体位置，作为被照准的目标。大地觇标一般分为寻常标和高标两类。寻常标仅仅作为被照准的目标用，其高度为 4.3 m、6.3 m；而钢标主要用于两相邻点间不通视的情况使其升高仪器和升高照准点的位置。

2. 中心标石的埋设

中心标石是控制点位的永久性标志。野外观测是以标石的标志中心为准，最后算得点的平面坐标和高程，就是标志中心的位置。如果标石被破坏或发生位移，测量成果就失去作用，点的坐标就毫无意义了。因此，在埋石时要严格贯彻质量第一的原则，标石灌注要十分坚实，埋设要十分稳固，确保能长期保存。

标石又分为一、二等三角(导线)点标石和三、四等三角(导线)点标石，标石一般用混凝土灌制，也可用规格相同的花岗岩、青石等坚硬石料凿成。标石分盘石和柱石两部分。柱石、盘石的顶部中央均嵌入一个标志，标志中心就是标石中心。标志可用金属或釉瓷制成，标石类型很多，在保证稳固并能长期保存的原则下，依等级和埋设地区的不同而有所有差别。在一般地区内，一、二等点的标石由柱石及上、下盘石组成，见图 3-11；三、四等点的标石由柱石和一块

盘石组成。

在经过以上技术设计，选点造标和埋石后，水平控制网中各控制点的位置已经在地面上明确表示出来，但要求得其坐标还需进行大量的角度测量，边长测量直至最后的平差计算，最终确定出它的坐标。

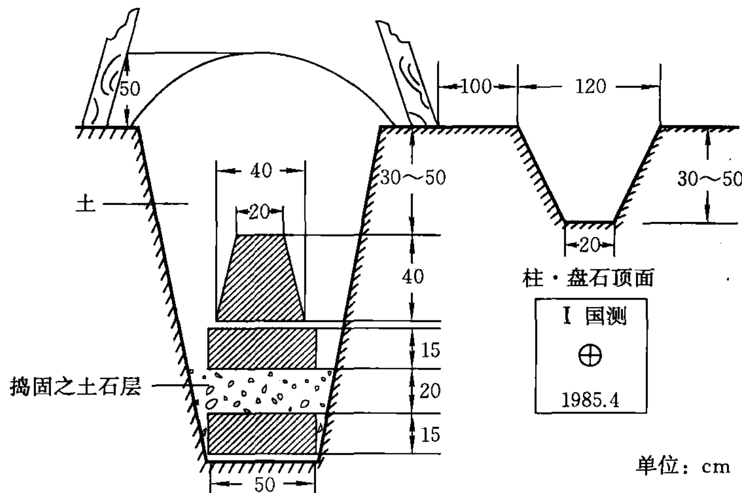


图 3-11　一、二等点中心标石埋设

§3-2　高程基准与高程控制网

高程控制网实现了高程基准，是确定地面点高程的基础。高程控制网是以水准测量为主、以三角高程测量为辅的方法建立的。水准测量分为四个等级，其中一、二等称为精密水准测量，三、四等称为普通水准测量，相应的高程控制网也分为四个等级。

一、水准原点与高程基准

高程基准定义了陆地上高程测量的起算面。是推算国家统一高程控制网中所有水准高程的起算依据，它包括一个高程起算面和一个永久性水准原点。世界上绝大多数国家和地区都选取海水面的平均位置作为起算面，因为这位置是实际存在，相当稳定的，并可以精确地测得，而且全球的海水面平均位置与地球的自然表面很接近。

为了确定平均海水面，通常都是在沿海的一个合适的地点设立验潮站，积年累月记录该处的海面位置。由于许多外界环境和地球内部因素的不断变化，尤其是月球和太阳位置的变动，海水面也随之变化。这种变化是周期性的，其长周期是天文潮汐周期。一个天文潮汐周期大约是 18.61 年。统计数据证明，长周期的海水面平均位置基本上是不变的，可以认为是该地区的海水平均位置。该位置处的高程为零，称之为水准零点。

为了明显而稳固标志出高程起算面(水准零点)的位置，还要建立一个永久性水准点，用精密水准测量将它与平均海水面联系起来，作为国家或地区控制网的高程起算点，这个水准点称水准原点。

我国的水准原点位于青岛观象山，由一个原点和五个附点构成水准原点网，附点用于监测原点的稳定性及保证联测精度。为了保护水准原点，将水准原点建在一幢小石屋内，屋内全部

由崂山花岗岩砌成，顶部中央及四角各竖一石柱，雕琢精细，玲珑别致。小石屋建筑面积 7.8 m²，石屋外面有两层高栅栏，石屋内还有三道铁将军把门，俄式建筑风格，1954 年建成（如图 3-12所示）。室内墙壁上镶一块刻有“中华人民共和国水准原点”的黑色大理石石碑，室中有一约 2 m 深的旱井，旱井底部，有一个价值不菲的拳头大小的黄玛瑙，玛瑙标志上有铜制和石制两层护盖，玛瑙上一个红色小点，这就是水准原点的标志（如图 3-13 所示）。



图 3-12 水准原点的外观照片

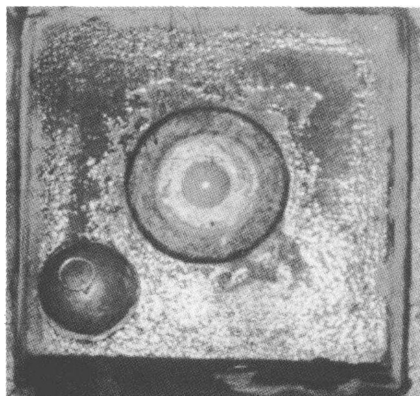


图 3-13 水准原点标志的表面

我国的高程是以黄海海平面为基准面，取自位于青岛大港一号码头西端的验潮站，地理位置为东经 120°18′40″，北纬 36°05′15″。室内有一直径 1 m，深 10 m 的验潮井，有三个直径分别为 60 cm 的进水管与大海相通。所用仪器初为德国制造的浮筒式潮汐自记仪，观测记录始于 1900 年。抗日战争期间遭到破坏。1947 年更新验潮仪恢复验潮工作。新中国成立后重新整修建筑更新设备，现用仪器为 HCJ1 型（又称瓦尔代）水位计、美国进口 SUTRON 9000 自动水位计以及国家海洋局技术研究所生产的 SCA6-1 型声学水位计。每天观测三次，时间分别为 07:45～08:00，13:45～14:00，19:45～20:00。根据长年获取的潮位资料，经严格的测量计算，得到的青岛验潮站海平面作为国家高程基准。

1959 年我国颁布的《中华人民共和国大地测量法式》规定：“国家水准点的高程以青岛水准原点为依据。按 1956 年计算结果，原点高程定为高出黄海平均水面 72.289 m。”这个起算面通常称为“1956 年黄海平均海水面”。

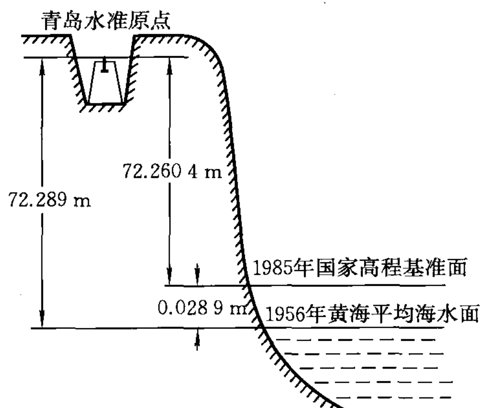


图 3-14 不同高程基准面与水准原点的关系

计算 1956 年黄海平均海水面所采用的资料是 1950 年至 1956 年的验潮结果，时间较短，不尽理想。1987 年 5 月我国启用“1985 国家高程基准”。新基准采用青岛验潮站 1952～1979 年的潮汐观测资料，用中数法计算该域的黄海平均海水面位置。经精密水准测量联测水准原点的高程为 72.260 4 m，与“1956 年黄海平均海水面”差 0.028 9 m 如图 3-14 所示。

二、深度基准

（一）深度基准概念

在海洋测绘领域，为描述海底地物地貌特征及进行相应的水深测量，需要用到深度及深度基准的概

念。深度是指在海洋(主要指沿岸海域)水深测量所获得的水深值,是从测量时的海面(即瞬时海面)起算的。由于受潮汐、海浪和海流等因素影响,瞬时海面的位置会随时间发生变化,因此,同一测深点在不同时间测得的瞬时深度值是不一样的。为此,必须规定一个固定的水面作为深度的参考面,把不同时间测得的深度都化算到这一参考水面上去。这一参考面即称为深度基准面。

深度基准面是海图上水深和潮汐高度的起算面。又称海图基准面。在限定的海域内通过长期潮汐观测和选定的数据模型计算求出,以当地平均海面与国家统一高程系统联测,通常选定在当地多年平均海面下某一距离 L 的位置上(如图 3-15 所示)。确定深度基准面既要考虑舰船航行的安全,又要考虑航道的利用率,所以深度基准面应位于平均海面以下,接近于最低潮位置的特征潮面。世界各国根据其海域潮汐特征,采用不同的计算公式来确定 L 值的大小,因此有各种深度基准面,如理论最低潮面、平均低低潮面、最低低潮面、大潮平均低低潮面、印度大潮低潮面、平均低潮面、大潮平均低潮面及赤道大潮低潮面等。

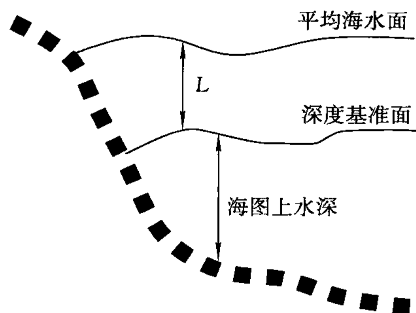


图 3-15 深度基准面

海图上标有主要港口的潮汐数据,把海图上的深度注记值加上从潮汐表中查出的某时刻的潮高,即可得到某时刻的实际水深。当深度基准面和潮汐高度基准不一致时,则需另加改正数。

(二)我国采用的深度基准面

我国 1956 年以前采用略最低低潮面作为深度基准面。1956 年以后采用弗拉基米尔斯基理论最低潮面(简称理论最低潮面),作为深度基准面。

三、国家高程控制网的布设方案及精度

国家高程控制网的布设原则与水平控制网布设原则类似,也采用由高级到低级,从整体到局部的方法分四个等级布设,逐级控制,逐级加密。而且各级水准路线一般都要求自身构成闭合环线,或闭合高一级水准路线上构成环形,以控制系统误差的积累和便于低一级水准路线的加密。

一等水准测量是国家高程控制网的骨干,同时也是进行有关科学研究的主要依据。因此,一等水准路线应沿着地质构造稳定、路面坡度平缓的交通路线布设,以适合高精度水准观测的要求。路线应构成环形,环线周长在平原丘陵地区应在 1 000～1 500 km,一般山区应在 2 000 km左右,这样的密度对于地域辽阔的我国是比较合适的。

二等水准测量是国家高程控制网的全面基础,应沿铁路、公路、河流布设,并构成环形。环线周长一般规定为 500～750 km,在平坦地区,根据建设需要可适当缩短,在山区或困难地区可酌情放宽。

三、四等水准测量是直接为地形测图和工程建设提供必须的高程控制点。三等水准路线是在高等级水准网内加密成闭合环线或附合路线。其环线周长规定不超过 300 km。四等水准路线一般是在高等级水准点间布成附合路线其长度规定不超过 80 km。

各等级水准测量的精度,是用每千米水准测量的偶然中误差 M_{Δ} 和全中误差 M_{w} 表示,它们的限差规定于表 3-1 中。

表 3-1 国家水准测量精度 单位：mm

水准测量等级	一等	二等	三等	四等
M_{Δ} 的限差	≤0.45	≤1.0	≤3.0	5.0
M_{w} 的限差	≤1.0	≤2.0	≤6.0	10.0

1984 年底，我国完成了覆盖全国大陆和海南岛的国家一等水准网的外业工作，它的布设情况如图 3-16 所示。

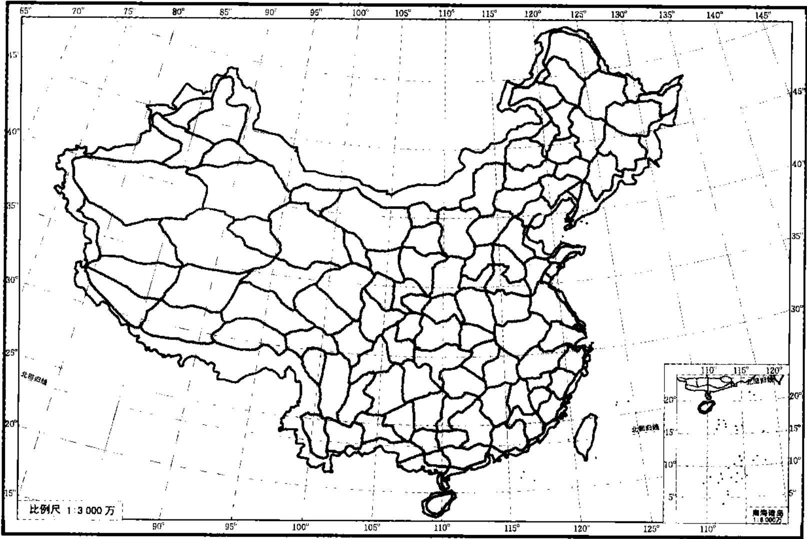


图 3-16 国家一等水准网

国家一等水准网共有 100 个水准环，289 条路线，水准路线全长 93 360.8 km，1986 年底完成整体平差，采用 1985 国家高程基准，青岛水准原点为起算点。为正常高系统，实测精度如表 3-2 所示。

表 3-2 水准路线精度

实测精度/mm	<±0.3	±0.3～±0.5	>±0.51
路线数	2	285	2

国家水准网的全面复测工作在 1991～1997 年进行，复测基本上是对原一等水准网进行的，对个别路线、结点做了调整，支线不安排复测。复测路线总长约 94 000 km，99 个环，273 条路线。平差后精度指标为：每千米高差中数偶然中误差 $M_{\Delta} \leqslant \pm 0.45$ mm，依 99 个环的闭合差计算的每千米高差中数全中误差 $M_{w} \leqslant \pm 1.0$ mm。

四、水准路线的设计，选点与埋石

(一)技术设计

技术设计是根据任务要求和测区情况，在小比例尺地图上，拟定最合理水准网或水准路线的布设方案。为此，设计前应充分了解测区情况，收集有关资料(例如测区地形图、已有水准测量成果等)。在设计时应尽量沿坡度较小、施测方便的交通道路布设水准路线。但为了使观测少受外界干扰，水准路线要避开城市、火车站等繁闹地区，还要避免跨越河流、湖泊、山谷等障碍物。拟设的水准路线应注意与原测路线重合时，若旧点符合要求应尽量利用，否则应重新埋设，但对旧点必须连测。

(二)选点

图上设计完成后,须进行实地选线和确定水准点位置。实地选线的目的在于使设计方案能符合实际情况,确定切实可行的水准路线和水准点位置。选定水准点位置要考虑到稳定、安全、能长久保存并便于观测使用。不可选在易于淹没、土质松软、易受震动和地势隐蔽而不便于观测的地点埋石。

(三)埋石

经过实地选线确定水准点位置后,要用水准标石和标志将它长期标志出来,以供联测使用。按照用途区分,水准标石分为基本水准标石、普通水准标石和基岩水准标石三大类。以下分别说明各种水准标石的用途和基本特点。

基本水准标石的作用在于较长久地保存水准测量精确成果,以供随时联测新设水准点和检测或恢复破坏的旧水准点的高程。基本标石是埋没在一、二等水准路线上,每隔 20～30 km 一座,荒漠地区 60 km 左右一座。

普通水准标石的作用是直接为地形测量或其他工程测量提供高程基础,它埋设在各等级水准路线上,一般要求每隔 4～8 km 埋设一座。

普通基岩水准标石是与岩层直接联系的永久性标石,是研究地壳和地面垂直运动的主要依据。一般情况下规定在一等水准路线上每隔 500 km 埋设一座,在大城市或地震带附近可适当增加,以满足科学研究的需要。

图 3-17 和图 3-18 分别为基本水准标石和普通水准标石的具体形式、规格及埋设情况。

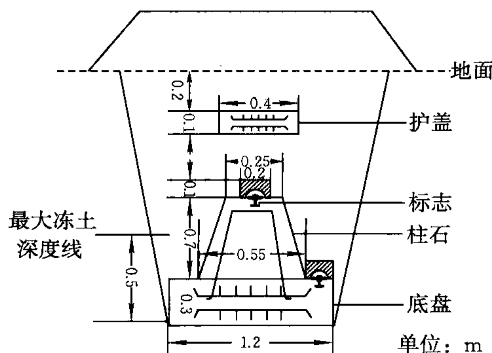


图 3-17　基本水准标石

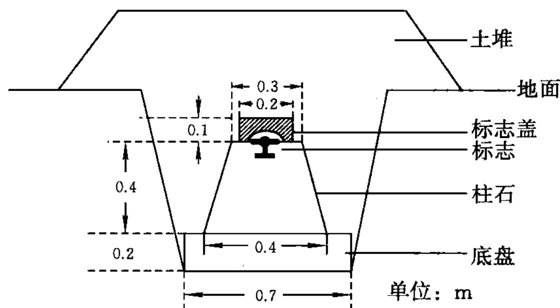


图 3-18　普通水准标石

在完成水准路线的设计、选点和埋石后,我们就可以利用水准测量的方法获得地面水准点的高程。

高程控制网的建立除水准测量作为主要方法外,还可以利用三角高程测量、GPS 测量得到地面点的高程,后两种方法的优点是建网的速度快,一般是和水平控制网同时测定,主要缺点是精度没有精密水准测量高。

§3-3　三维坐标基准与卫星大地控制网

卫星大地控制网同样是由地面上一系列大地控制点连成网状而构成。与经典水平控制网、高程控制网不同的是,卫星大地控制网可直接获得控制点的三维坐标,即实现三维坐标基准。建立卫星大地控制网的技术手段必须是具备能够提供三维坐标的 GNSS(GPS,

GLONASS,DORIS)、VLBI、SLR 等空间大地测量技术，经典的大地测量手段(如三角测量、导线测量、水准测量等)是无法实现的。

一、三维坐标基准

传统的大地测量，水平坐标与高程坐标采用两种不同的基准，且水平控制网与高程控制网无法实现统一，使其在实际工作中受到了许多局限。例如，在研究卫星、航天器技术及地球自转、板块运动等地球动力学问题时则必须参考于地心位置的三维基准。空间大地测量技术能够测定或解算出地面点的三维坐标，可实现大地测量的三维基准。

(一)全球性的三维坐标基准

随着 GNSS、VLBI、SLR 等空间大地测量技术的发展，为建立全球性的三维基准创造了条件。全球性的三维基准是利用分布在全球范围内的上述空间大地测量台站联成相应的全球性网来实现。每一种空间技术分别由相应的国际组织 IGS、IVS、ILRS 等进行组织、协调和管理。各种单一空间大地测量技术实现的大地网经联合平差后，形成综合性的三维基准，即国际地球参考框架(ITRF)。

1. 全球 IGS 网

1991 年国际大地测量协会(IAG)决定在全球范围内建立一个 IGS(原名为“International GPS Service”,于 2005 年 3 月更名为“International GNSS Service”)观测网，并于 1992 年 6～9 月间实施了第一期会战联测，我国借此机会由多家单位合作，在全国范围内组织了一次盛况空前的“中国 92 GPS 会战”，参加 IGS 观测网的主要有上海、武汉、台北、昆明、西安和乌鲁木齐等主要城市。参加全球 IGS 合作，目的是在全国范围内确定高精度的地心坐标，建立起我国新一代的地心参考框架及其与国家坐标系的转换参数；以优于 10^{-8} 量级的相对精度确定站间基线向量，布设成国家高精度卫星大地网的骨架，并奠定了地壳运动及地球动力学研究的基础。

IGS 是覆盖全球范围的 GNSS 连续运行站网和综合服务系统，它无偿向全球用户提供 GPS、GLONASS 各种信息，如卫星精密星历、快速星历、预报星历、IGS 站坐标及其运动速率、IGS 站所接收的卫星信号的相位和伪距数据、地球自转速率等。在大地测量和地球动力学方面支持了无数科学项目，包括电离层、气象、参考框架、地壳运动、精密时间传递、高分辨地推算地球自转速率及其变化等。

IGS 的基准站遍布世界各国，其 380 余个测站隶属于不同国家的 100 多个科研机构、大学或政府组织。在 IAG 的协调下，成立了由各国设站机构和政府部门组成的协调委员会，其中又组成了董事局。董事局是 IGS 的授权管理机构，管理若干数据中心和分析中心，负责提供服务与产品发布，并负责组织国际合作研究与攻关项目。其服务内容与产品包括以下方面：

(1)GPS 卫星星历服务，产品包括预报、快速和最终三类精密星历，精度分别是 25 cm、5 cm和优于 5 cm；延时分别是 0 h、17 h 和 13 d。GLONASS 卫星只提供最终星历，精度大约为 30 cm。

(2)GPS 卫星和 CORS 测站接收机钟差服务，产品包括预报、快速和最终三类钟差，精度分别是 5 ns、0.2 ns 和 0.1 ns；延时分别是0 h、17 h 和 13 d。

(3)连续运行站(跟踪站)坐标(包括相应的框架、历元)和站运动速率服务，产品包括测站水平、垂直位置和水平、垂直运动速率，其水平和垂直位置精度分别是 3 mm 和 6 mm，相应的年运动速率精度是 2 mm/a 和 3 mm/a。IGS 站坐标所采用的坐标参考框架和 IERS 是互相协调的。

(4)地球自转参数服务，产品包括快速和最终极移、短期章动、日长变化等。IGS 公布的最

终每日极坐标，其精度为 0.1 mas，快报的相应精度为 0.2 mas。

(5)大气参数服务，产品包括最终对流层参数，精度为天顶延迟 4 mm，发布延时为 4 周。进一步还将提供电离层格网电子密度分布参数。

IGS 网是全球最大的卫星大地控制网，其台站在全球分布图如图 3-19 所示。除此之外，还有全球 IVS(International VLBI Service for Geodesy and Astrometry)网、ILRS(International Laser Ranging Service)网和 IDS(International DORIS Service)网，它们共同实现 ITRF 以实现全球的大地测量三维基准。

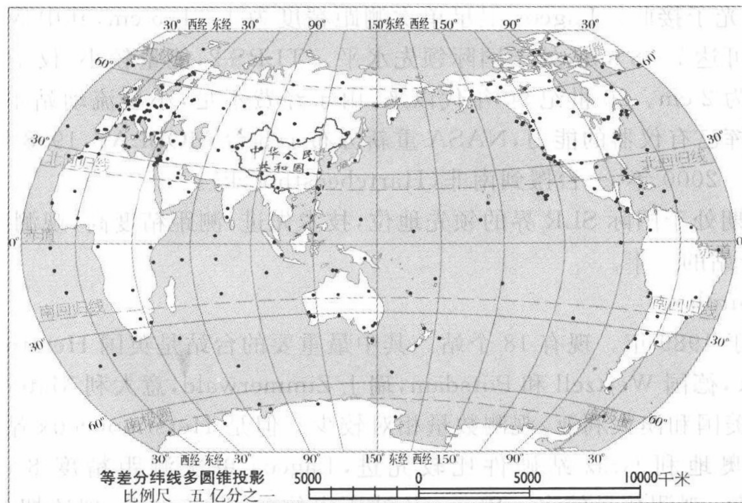


图 3-19　全球 IGS 网台站

2. 全球 ILRS 网

目前全球共有 50 余个 SLR 站，其分布如图 3-20 所示。为了组织国际联合观测、加强合作和协调，在原来 SLR 专业委员会的基础上，经过重新讨论和选举，于 1998 年 11 月成立了"国际激光测距服务(ILRS)"。中央局设在 NASA/GSFC。ILRS 网又可分为若干个子网，下面分别介绍。

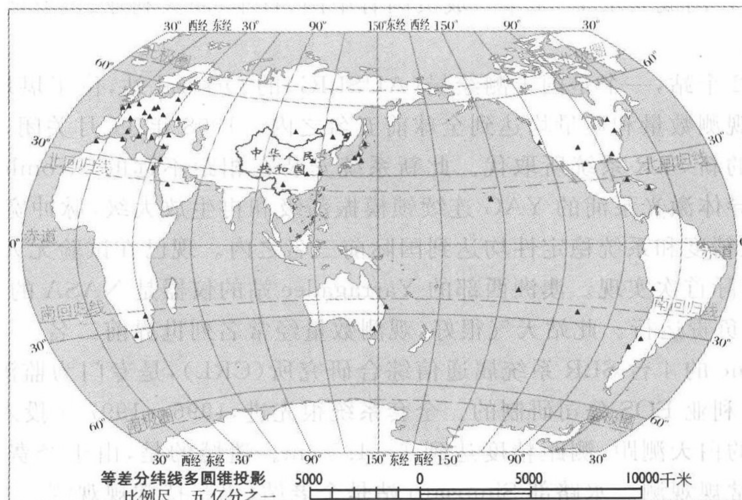


图 3-20　全球 SLR 网台站

1)美国宇航局(NASA)网

20 世纪 70 年代末,已有 MOBLAS 站、McDonald 天文台和夏威夷 Haleakala 站等 5 个站。80 年代,又增加了 4 个小型流动站 TLRS 1～4。目前有 9 台仪器,分布在美国本土、南太平洋(Tahiti)、南美洲(秘鲁 Arequipa,TLRS 3)及澳大利亚(Yarragadee)等地。这些台站均是第三代系统,采用 Quantel International 公司(现改名为 Continuum 公司)的 Nd:YAG 主被动锁模激光器,脉冲能量是 100～140 mJ(532 nm),脉冲宽度 200 ps,重复频率 4～5 Hz。望远镜口径:MOBLAS 为 76 cm,TLRS 为 25～30 cm。光电接收器采用微通道板光电倍增管(MCP-PMT),多光子接收。Lageos 卫星单次测距精度为 1～1.5 cm,其中 MOBLAS 由于回波很强,精度高,可达 7～8 mm,处于国际领先水平。TLRS-2,能量较小,仅 10 mJ,信噪比差,单次测距精度仅为 2 cm。20 世纪 90 年代以来,由于经费不足,小型流动站不再流动,较少运转。为了充分发挥已有仪器的能力,NASA 重新分布了 5 台 MOBLAS,1998 年一台搬到南太平洋 Tahiti 岛上。2000 年,一台搬到南非(Hartebeesthoeck)。

NASA 网长期处于国际 SLR 界的领先地位,技术先进,测距精度高,观测数量约占全球常规运行的 50 多个站的一半。

2)欧洲网(Eurolas)

欧洲网成立于 1989 年。现有 18 个站。其中最重要的台站是英国 Herstmonceux,奥地利 Graz,法国 Grasse,德国 Wettzell 和 Potsdam,瑞士 Zimmerwald,意大利 Matera 等。欧洲台站的天气情况不如美国和澳大利亚,观测数量相对较少。但是 Herstmonceux 站系统稳定性好,观测数量很多。奥地利 Graz 站硬件比较先进,Lageos 单次测距精度 8 mm,欧洲第一。Grasse 站天气较好,观测数量较多。Wettzell 站历史悠久、设备先进,现还拥有一套大型综合测量设备——TIGO,包括多种测量手段,如 SLR、VLBI、GPS、PRARE 以及重力仪、地震仪、气象仪器等,其中 SLR 系统采用了最先进的半导体激光器泵浦的钛宝石激光器,可以进行双波长测距。Matera 站新安装了一台十分先进的 SLR 系统,望远镜口径 1.5 m,测距精度与 NASA 相同。

3)西太平洋网(WPLTN)

西太平洋 SLR 网成立于 1994 年。成员国有中国、日本、澳大利亚、俄罗斯和沙特阿拉伯,共 15 个站。

澳大利亚有 2 个站,一个是国土测绘局(AUSLIG)的 Orroral 站,位于堪培拉,20 世纪 70 年代开始运行。观测数量和质量均达到全球前五名之内。1998 年 11 月关闭,由 EOS 公司为国土测绘局研制的新 SLR 系统所取代。此新系统安装在相距不远的 Stromlo 山上。新系统采用了先进的半导体激光泵浦的 YAG 连续锁模振荡级和再生放大级,脉冲宽度为 25 ps。目前观测数量、测距精度和系统稳定性均达到国际前三名之内。现已在试验无人全自动观测,已获初步成功,属国际首次实现。澳洲西部的 Yarragadee 站的仪器是 NASA 的 MOBLAS 5,现已移交 AUSLIG 负责运行。此站天气很好,观测数量经常名列世界前二名。

日本 Keystone 的 4 台 SLR 系统属通信综合研究所(CRL),是专门为监测东京附近地壳形变目的,由澳大利亚 EOS 公司研制的。全套系统很先进,1996～1997 年投入观测。1999 年已实现比较稳定的白天测距,测距精度达到 1～1.5 cm。遗憾的是,由于经费原因,这 4 个站有可能不再进行常规观测。水路部 Simosato 站是个老站,仍坚持常规观测。

俄罗斯的 SLR 站较多,参加国际联测较多的有 Komsomolsk 和 Maidanak(现属乌兹别克

斯坦)2 个站。单次测距精度为 4～6 cm。每站每年观测圈数为 400～600 圈。另有 2～3 个新站已研制成功,性能较好,即将投入常规观测。

中国 SLR 网有 5 个固定站和 2 个流动站,部分站的设备见图 3-21。



上海站　北京站　流动站

图 3-21　SLR 网站设备

1971～1972 年华北光电所(与北京天文台合作)和上海天文台(上海光机所合作)在国内最早开始 SLR 试验。第一代系统采用红宝石调 Q 激光器,单次测距精度 1～2 m。1980 年上海天文台首次采用 Nd:YAG 调 Q 倍频器件进行卫星测距,并采用了恒比鉴别器、高精度时间间隔计时器等,使测距精度提高到 20～30 cm。1983 年,由中国科学院组织、几个研究所协作完成的第二代 SLR 系统在上海天文台投入运转,测到了 8 000 km 远的 Lageos 卫星,单次测距精度达到 15 cm,并参加了 MERIT 国际地球自转联测。

中国科学院长春 SLR 站于 1992 年正式参加国际联测。1997 年 8 月,SLR 系统有重要改进,单次测距精度从 5 cm 提高到 1～2 cm,观测数量和质量均有了显著改进。每年观测数约为 2 600 圈,进入世界前十名。北京 SLR 站属国家测绘局,从 1994 年参加国际联测。1999 年以来有了重要改进。目前的测距精度也达到了 1～2 cm,每年可获得约 1 500 圈数据。武汉 SLR 站由中科院测量与地球物理研究所和中国地震局地震研究所联合建立。1988 年开始参加国际联测。由于地处市区,天气不好,资料较少。2000 年搬到郊区,观测条件大为改善。中科院云南天文台于 1998 年参加国际联测,目前的测距精度约为 3 cm,该系统望远镜口径 1.2 m,激光能量强,具有很强的测距能力。将来有可能成为月球测距站。

两台 SLR 流动站均由地震研究所研制,其中一台属西安测绘研究所,一台属地震研究所。这两台流动站主要用于监测中国地壳运动。

中国 SLR 网成立于 1989 年,由上述台站组成,目前负责单位是中科院上海天文台。上海天文台负责观测的组织协调,统一观测规范,合作进行技术改造。上海台还是 SLR 区域数据中心和数据分析中心,负责国内 SLR 资料的归档,观测资料的评估,每周发表全球观测资料的评估报告。同时,利用国内及国际的 SLR 资料,进行天文地球动力学和大地测量等应用研究。

3. 全球 IVS 网

VLBI 观测的特点之一为多台站组网观测,因此,它必须要求广泛的国际合作。为了更有效地开展 VLBI 观测和技术发展方面的国际合作,建立了国际性的 VLBI 组织 IVS,负责为全球性的 VLBI 应用于天体测量和地球动力学方面的合作组织,开展 VLBI 观测、数据处理及技术发展的国际合作并提供服务。IVS 协调有关 VLBI 技术的各种活动,为其提供支持。其目标是:

(1)为大地测量、地球物理以及天体测量学领域的研究与观测实施提供支持;

(2)推进天体测量、大地测量领域的 VLBI 技术研究和技术开发；

(3)实现与 VLBI 各种研究结果的用户团体的交流并将 VLBI 技术集成到全球地球观测系统中。

中国的上海佘山站和乌鲁木齐的南山站均为 IVS 的站点。全球 IVS 台站的分布如图 3-22所示。IVS 网由于其观测目的不同又可分为如下的子网和组织：

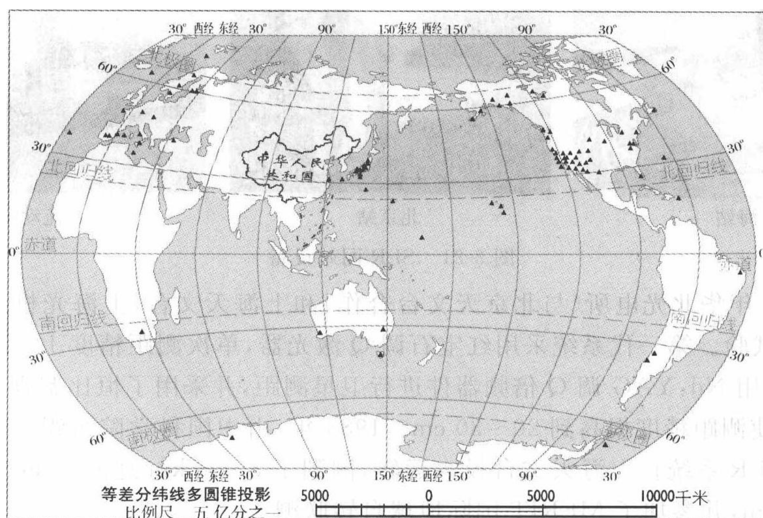


图 3-22 全球 IVS 网台站

(1) EVN：European VLBI Network(欧洲 VLBI 网)的缩写，它是首先由欧洲国家发起成立的 VLBI 组织。自 1994 年起，我国的上海和乌鲁木齐 VLBI 站也参加了该组织，所以目前实质上为"欧亚 VLBI 网"。EVN 提供天体物理及某些天体测量课题的观测及进行 VLBI 技术发展的国际合作。

(2)APT：Asia-Pacific Telescope(亚太射电望远镜)的缩写，它是由亚太地区 VLBI 组织或台站组成的，每年不定期地组织天文学和地球动力学方面的 VLBI 观测，并组织学术交流。

(3)CORE：Continuous Observation Rotation of Earth(地球自转连续观测)的缩写，它为美国宇航局(NASA)的一项研究计划，由美国 NASA 的哥达德空间飞行中心(GSFC)主持，全球大多数具有天体测量/大地测量能力的 VLBI 台站参加了该项计划。其主要科学目的为：高精度连续测量地球自转参数；同时，也为天球参考系、地球参考系的建立和维持及现代板块运动观测提供高精度数据。

(4)VSOP：VLBI Space Observatory Program（VLBI 空间观测站计划）的缩写。它为日本文部省宇宙科学研究所主持的一项空间 VLBI 计划，它将一台等效口径 8 m 的天线发射至地球卫星轨道上，构成了一个空间 VLBI 站，其远地点为 2 万余公里。全球大多数地面 VLBI 站均参加了该项计划的空一地 VLBI 观测，所以它也形成了一项全球性 VLBI 合作计划。

(5)VLBI 深空探测及我国的 VLBI 网。近年来，由于人类对深空探测的需要，利用 VLBI 对人造卫星及航天器进行跟踪观测及定位的作用和意义日益受到关注。美国、日本等国家和欧洲都逐步建立了 VLBI 航天网，并在进一步完善中，通过 VLBI 网对航天器进行跟踪，已经取得了很好的应用结果。由于美国在航天领域的主导地位，VLBI 技术在空间探测中的应用

也发展的最为成熟，已在多个空间探测项目中成功运用了 VLBI 技术（比如阿波罗 16 号，先锋号、旅行者号、伽利略号等），其定位精度从初期的十毫角秒提高到 20 世纪 90 年代好于一毫角秒。日本计划中的探月项目（SELENE 计划）也将运用 VLBI 技术，并且也早已开展了相关的应用研究。

我国 VLBI 的发展开始于 20 世纪 70 年代后期。1979 年正式提出建立中国的 VLBI 干涉仪和台站系统，初步包括上海、乌鲁木齐和昆明 3 个台站和一个相关处理中心，并决定首先在上海建立一个 25 m 的射电天线。上海的佘山站于 1987 年 11 月建成并投入调试运行，于 1988 年 4 月开始实施多项国际天文地球动力学 VLBI 联合观测计划，如中—日 VLBI 合作观测、中—德 VLBI 大地测量合作计划、美国（NASA）的 CDP（Crustal Dynamics Project）、DOSE（Dynamics of Solid Earth）及 CORE 计划的 VLBI 观测，以及 APSG（Asia-Pacific Space Geodynamics）VLBI 观测等。

1994 年 10 月乌鲁木齐的南山站建成，使得中国的 VLBI 技术有了进一步的发展。1998 年底总参测绘局研制的 3m 口径天线的 VLBI 流动站投入调试运行，主要放置在云南的昆明。这一年里，上海的佘山 VLBI 站参加了三次由美国宇航局组织的火星全球勘探者的差分 VLBI 定位观测，获得成功。1999 年佘山站与南山站一起成为 CORE 计划的基准站。2003 年这两个 VLBI 测站对地球空间探测"双星计划"的赤道卫星的发射过程进行了成功的 VLBI 跟踪观测，并得到了质量很好的观测数据。

2004 年 1 月，国家航天局宣布，我国将正式启动月球资源探测卫星工程（"嫦娥工程"）立项进程，标志着我国的深空探测进入了实际操作阶段。"嫦娥工程"以我国的 USB 测控系统为主，以中国科学院的 VLBI 测量系统为辅进行轨道监测。为此，在原有中国 VLBI 网的基础上，组建了昆明（40 m 天线）和北京（50 m 天线）两个 VLBI 站，同时改造扩充了原有的上海（25 m 天线）和乌鲁木齐（25 m 天线）VLBI 观测站的功能，建立了 VLBI 站与相关处理中心的实时数据快速传递通道、实时相关处理机和相关处理中心。目前的中国 VLBI 网已成为一个具有 4 个固定台站和一个相关处理中心的实时观测网（如图 3-23 所示）。

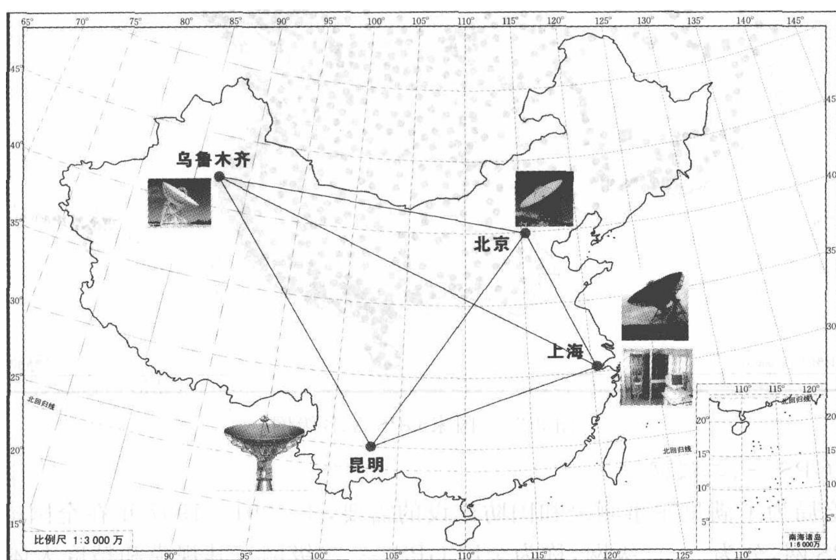


图 3-23　我国 VLBI 网

在众多的空间大地测量技术中，由于 VLBI、SLR 等设备昂贵、布设测站比较困难，这些空间大地测量技术实现的台站数量在全球分布较少且很不均匀，因而在某区域内很难联成有效的控制网，在实际工作中它们只能在全球范围内联成三维控制网，通过国际协作的方式参与全球性的联测来实现全球性的三维基准。相对而言，GNSS 技术具有测量方便、快捷、建站方便等特点，因而建立区域性的三维控制网主要采用 GNSS 技术。

(二)我国的三维坐标基准—高精度 GPS 网

对于区域的三维坐标基准，一种方法是根据国家建设需要或是根据某些科学研究需要在全国范围内建立高精度 GPS 网，例如我国的高精度 GPS A、B 级网、GPS 一、二级网及满足地震预报和板块运动研究所布设的“中国地壳运动观测网络”等。

1. 国家 GPS A、B 级网

国家 GPS A 级网于 1992 年结合国际 IGS92 会战，由国家测绘局、中国地震局等单位布测，全网 27 个点，平均边长约 800 km。1996 年国家测绘局进行了 A 级网复测，经全网整体平差后，地心坐标精度优于 0.1 m，点间水平方向的相对精度优于 2×10^{-8} 垂直方向优于7×10^{-8}。

B 级网由国家测绘局于 1991～1995 年布测，包括 A 级点共 818 个点。B 级网的结构在东部地区为连续网，点位较密集；中部地区为连续网与闭合环结合，点位密度适中；西部地区为闭合环与导线型，点位密度较稀疏。B 级网 60％的点与我国一、二等水准点重合，其余进行了水准联测。B 级网点间重复精度水平方向优于 4×10^{-7}，垂直方向优于 8×10^{-7}。国家 GPS A、B 级网点分布见图 3-24。

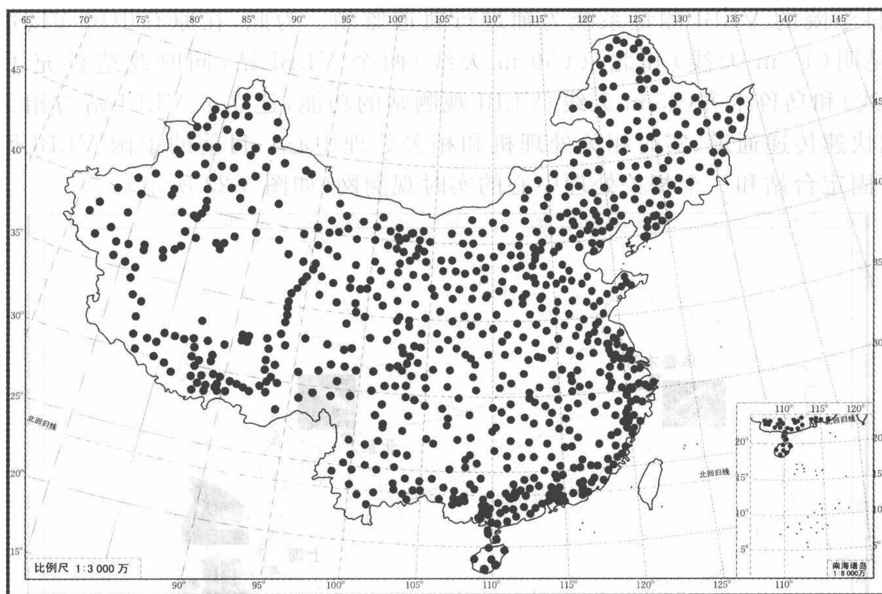


图 3-24 国家 GPS A、B 级网

2. 全国 GPS 一、二级网

总参测绘局为了满足军事测绘和国防建设的需要，于 1991～1997 年在全国范围内布测了高精度的 GPS 网，分为一、二级网，称为全国 GPS 一、二级网。其规模和精度大体与国家 GPS A、B 级网相同，其点位分布如图 3-25 所示。全网 534 个点，在全国陆地(除台湾)、海域均匀分

布，还包括南沙重要岛礁。一级网44点，平均边长约800 km，于1991年5月至1992年4月观测；二级网分7个测区（南海岛礁，东北测区，华北测区，西北测区，华东测区，东南测区，青藏云贵川测区）观测，先后于1992～1997年施测。二级网在一级网基础上布测，平均边长约200 km，一、二级网点均进行了水准联测。经平差计算后，一级网的精度约为3×10^{-8}，二级网精度为1×10^{-7}。

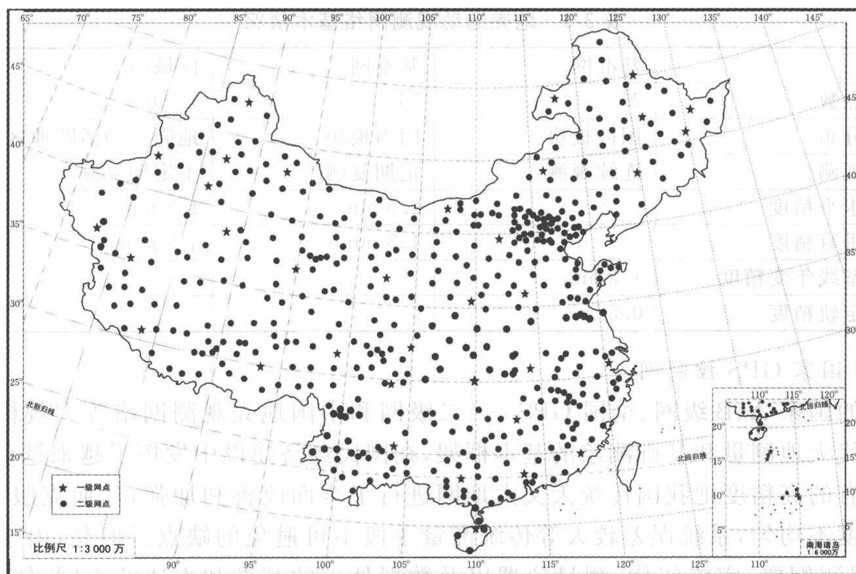


图 3-25 全国 GPS 一、二级网

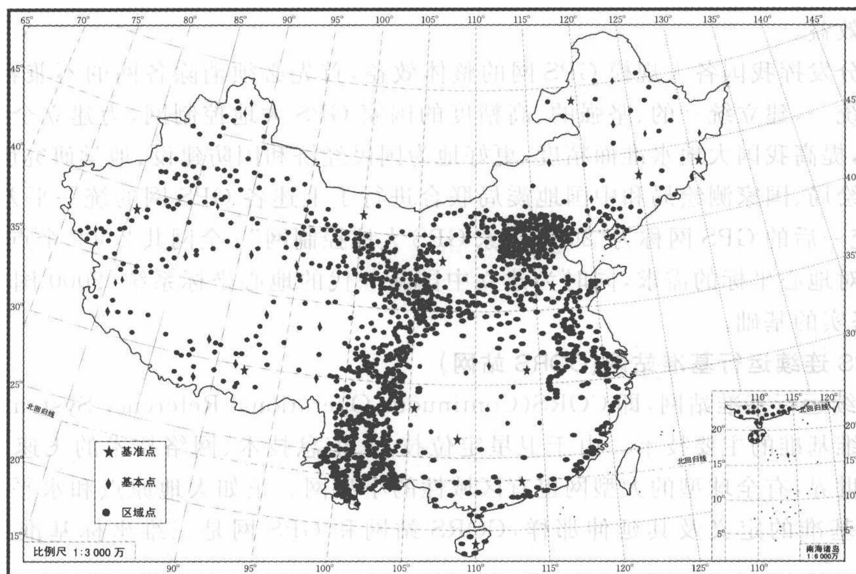


图 3-26 中国地壳运动观测网络

3. 中国地壳运动观测网络

中国地壳运动观测网络由中国地震局、总参测绘局、国家测绘局、中国科学院等四单位于1998年开始布测（见图3-26），是以地震预报为主要目的并兼顾大地测量需要的监测网，网点

的布设主要分布在我国的大板块和地震活跃区附近。全网包括基准网点、基本网点和区域网点共 1 081 点。其中基准网点间距 1 000 km 左右，为 GPS 常年连续观测点；基本网点间距约 500 km，为定期复测点。基准网和基本网主要分布于国内较大的板块，区域网点间距约几十到百千米，为不定期复测点，全国范围内分布不均，较密集地分布在地壳运动活跃地区。地壳运动观测网络基本情况见表 3-3。

表 3-3 地壳运动观测网络基本情况

	基准网	基本网	区域网
点数	25	56	1 000
分布	国内板块	国内板块	地壳运动活跃地区
观测	连续观测	定期复测	不定期复测
水平精度		2.5 mm	1.8 mm
垂直精度		4.8 mm	4.9 mm
基线年变精度	1.3 mm		
定轨精度	0.5 m		

4. 2000 国家 GPS 控制网

已布成的国家 A、B 级网、全国 GPS 一、二级网和中国地壳观测网络等大规模 GPS 网已成为我国现代大地测量和基础测绘的基本框架，在国民经济建设中发挥了越来越重要的作用。它们以其特有的高精度把我国传统天文大地网进行了全面改善和加强，从而克服了传统天文大地网的精度不均匀，系统误差较大等传统测量手段不可避免的缺点。但是，由于布网原则、布网目的、观测纲要、实施年代、测量仪器以及数据处理的基准和方法的不同，使得各大规模 GPS 网之间存在着基准差异和系统差，这给实际应用带来了很大的困难，并在实际应用中难以发挥整体效益。

为了充分发挥我国各大规模 GPS 网的整体效益，首先必须消除各网的不兼容性，将各网的系统基准统一，建立统一的、坚强的、高精度的国家 GPS 大地控制网，为建立全国统一的地心坐标系统，提高我国大地水准面精度，更好地为国民经济和国防建设、地学研究服务。为此，总参谋部测绘局、国家测绘局和中国地震局联合进行了上述各 GPS 网的统一平差，经联测和数据处理，统一后的 GPS 网称为“2000 国家 GPS 大地控制网”。全网共 2 609 个点。可满足现代测量技术对地心坐标的需求，同时为建立中国新一代的地心坐标系统(2000 国家大地坐标系)打下了坚实的基础。

(三)GPS 连续运行基准站网(CORS 站网)

GPS 连续运行基准站网，即 CORS(Continuous Operational Reference System)，是当前建立区域性三维基准的主要技术。由于卫星定位技术、信息技术、网络技术的飞速发展，CORS 网已经遍布世界，有全球型的大型网也有区域性的小型网。正如大地原点和水平控制网是经典水平坐标基准的定义及其延伸那样，CORS 站网和 GPS 网是三维坐标基准的定义及其延伸。

1. CORS 系统的基本组成

作为三维控制网的基准，CORS 系统是卫星定位技术、计算机网络技术、数字通信技术等高新科技多方位、深度结晶的产物。CORS 系统由基准站网、数据处理中心、数据传输系统、定位导航数据播发系统、用户应用系统五个部分组成，各基准站与监控分析中心间通过数据传输

系统连接成一体,形成专用网络。

(1)基准站网:基准站网由范围内均匀分布的基准站组成。负责采集 GPS 卫星观测数据并输送至数据处理中心,同时提供系统完好性监测服务。

(2)数据处理中心:系统的控制中心,用于接收各基准站数据,进行数据处理,形成多基准站差分定位用户数据,组成一定格式的数据文件,分发给用户。数据处理中心是 CORS 的核心单元,也是高精度实时动态定位得以实现的关键所在。中心 24 小时连续不断地根据各基准站所采集的实时观测数据在区域内进行整体建模解算,自动生成一个对应于流动站点位的虚拟参考站(包括基准站坐标和 GPS 观测值信息)并通过现有的数据通信网络和无线数据播发网,向各类需要测量和导航的用户以国际通用格式提供码相位/载波相位差分修正信息,以便实时解算出流动站的精确点位。

(3)数据传输系统:各基准站数据通过光纤专线传输至监控分析中心,该系统包括数据传输硬件设备及软件控制模块。

(4)数据播发系统:系统通过移动网络、UHF 电台、Internet 等形式向用户播发定位导航数据。

(5)用户应用系统:包括用户信息接收系统、网络型 RTK 定位系统、事后和快速精密定位系统以及自主式导航系统和监控定位系统等。按照应用的精度不同,用户服务子系统可以分为毫米级用户系统、厘米级用户系统、分米级用户系统、米级用户系统等;而按照用户的应用不同,可以分为测绘与工程用户(厘米、分米级)、车辆导航与定位用户(米级)、高精度用户(事后处理)、气象用户等几类。

CORS 系统不仅是一个动态的、连续的定位框架基准,同时也是快速、高精度获取空间数据和地理特征的重要的技术手段。CORS 系统更多应用则是对某一小区域(如城市)提供三维基准。在区域内向大量用户同时提供高精度、高可靠性、实时的定位信息,并实现城市测绘数据的完整统一。例如在城市中应用 CORS 系统,将对现代城市基础地理信息系统的采集与应用体系产生深远的影响。它不仅可以建立和维持城市测绘的基准框架,更可以全自动、全天候、实时提供高精度空间和时间信息,成为区域规划、管理和决策的基础。该系统还能提供差分定位信息,开拓交通导航的新应用,并能提供高精度、高时空分辨率、全天候、近实时、连续的可降水汽量变化序列,并由此逐步形成地区灾害性天气监测预报系统。此外,CORS 系统可用于通信系统和电力系统中高精度的时间同步,并能就地面沉降、地质灾害、地震等提供监测预报服务、研究探讨灾害时空演化过程。

2. 国外 CORS 网简介

国际大地测量发展的一个特点是建立全天候、全球覆盖、高精度、动态、实时定位的卫星导航系统。在地面则建立相应的永久性连续运行的 GPS 参考站。目前世界上较发达的国家都已建立或正在建立 CORS 系统。下面介绍一些有代表性的系统。

1)美国的连续运行参考站网系统(CORS)

美国的 CORS 系统由美国国家大地测量局(NGS)负责,最初由 NGS 的跟踪网、美国海岸警备队(USCG)差分网、美国联邦航空局(FAA)的 WAAS 网、美国工程兵团(USACE)的跟踪网等 137 个 GPS 参考站组成。

目前美国本土已有 2 000 多个 GPS 连续运行站,覆盖全美(包括阿拉斯加),构成了美国新一代动态国家参考系统。系统的所有参考站都配置双频全波型 GPS 接收机和抑径圈天线。

每天卸载当天的数据，数据记录格式为 1 s、5 s、15 s、30 s 的 RINEX 格式。通过因特网向全美和全球用户提供参考站坐标和 GPS 卫星跟踪观测站数据。此外，还提供其他如大地水准面、坐标系转换等服务。用户用一台 GPS 接收机在美国任意位置观测，然后通过因特网卸载若干参考站数据，即可进行事后精密定位。

NGS 可以通过网络向用户提供 GPS 待定点相邻的 CORS 站(3 个以上)的 GPS 相应载波相位和码距(在用户要求的时间段内)，以支持用户的 GPS 准实时或后处理定位。NGS 也可以为用户通过网络提供 GPS 定位计算服务，这一服务可以在用户提供待定点的观测资料后的几个小时内完成，称为 NGS 的在线 GPS 定位服务(Online Position User Service，OPUS)。

此外，NGS 可以通过网络向用户提供 1983 北美大地基准(NAD83)或国际地面坐标框架(ITRF)的坐标及相应站的位移速率，也可以提供这些站的气象数据。NGS 也可以通过网络向用户提供 IGS 的精密或预报 GPS 星历，以及 IGS 的全球各 GPS 永久性连续运行站的坐标及其位移速率。目前用户利用 CORS 计算美国国内 26～300 km 长的基线端点的相对点位精度，水平方向可达 1.0 cm，高程方向可达 3.7 cm，二者都是 95%置信度。以上是指用户在基线端点的观测时间不少于 4 h 的情况，若观测时间增加至 12 h，水平方向精度改善不大，但高程相对精度可提高至 2 cm。

NGS 同时提供 NAD83 大地高转换到美国的高程系统 NAVD88 的服务，主要采用美国 GEOID2003 进行转换，误差为±2.5cm。此外，GPS 厂商通常仅向用户提供 GPS 接收机接收 L_1 频道时的天线相位中心至天线底座之间的距离，称为天线参考点(ARP)，但随着 GPS 信号的进入方向和周边电子场的不同，天线参考点的位置，随生产 GPS 天线不同厂家的电子材料，会有不同的位移变化，因此为了提高高程定位精度，NGS 还提供各种仪器天线相位中心变化的实测资料，供用户选择参考。

2)欧洲永久性连续运行网(EPN)

EPN 是在欧洲各国和某些组织(学术团体、大学)建立的永久性卫星基准站网的基础上，由 IAG 的欧洲分委员会(EUREF)负责建立的一个合作性地区连续运行站网系统，目前由 122 个永久基准站组成，其中 42 个属 IGS 基准站，其工作流程是各国或各组织的若干永久性基准站构成一个子网，各子网有自己的运行中心，若干运行中心又构成一个地区数据中心，各地区数据中心的数据汇总到欧洲区域中心，再由区域中心将产品数据反馈至 IGS 数据中心、地区数据中心以及各类用户。

EPN 目前的主要任务是维持欧洲区域空间参考框架，主要服务是每周提供一个全网测站坐标解算结果及对其相关精度存在问题的分析，同时提供一个周解的时间序列分析。此外还提供各测站的原始观测值，以满足欧洲地区不同组织的精密定位要求。欧洲的德国、英国、瑞士等国家的 CORS 除了作为国家的空间参考框架外，同时还基于一些差分技术和 RTK 技术，提供事后精密定位服务和实时精密定位服务。

英国建立的“连续运行 GPS 参考站”(COGRS)系统的功能和目标类似于上述 CORS，但结合英国本土情况，多了一项监测英伦三岛周围海平面的相对和绝对变化的任务。英国的 COGRS 由测绘局(Ordance Survey)、环保局、气象局、农业部、海洋实验室共同负责。目前已有近 60 个 GPS 连续运行参考站、900 多个 GPS 点。目前英国测绘局已组建了 GPS 在线服务中心，其主要任务是传输、提供、归档、处理和分析各个 GPS 主动站和被动站的数据，并提供在线坐标转换服务。

德国的全国卫星定位网由100多个永久性GPS跟踪站组成。它也提供4个不同层次的服务:①米级实时DGPS(精度为1～3 m);②厘米级实时差分GPS(精度为1～5 cm);③精度为1 cm的准实时定位;④高精度大地定位(精度优于1 cm)。

其他欧洲国家,即使领土面积比较小的芬兰、瑞士等也已建成具有类似功能的永久性GPS跟踪网,作为国家地理信息系统的基准,为GPS差分定位、导航、地球动力学和大气研究提供科学数据。

3)日本的GPS连续应变监测系统(COSMOS)

在亚洲,目前日本已建成近1 200个GPS连续运行站网的综合服务系统——GeoNet,其站间距离平均为30 km。这种格网是由日本地理院组建的,是日本重要的国家基础设施。其主要功能是进行地壳监测和地震预报;构成高精度的动态国家大地控制网;满足测图和GIS数据采集和更新的需要;为气象和大气部门开展GPS大气学研究服务等。

3. 我国的CORS网

随着国家信息化程度的提高及计算机网络和通信技术的飞速发展,电子政务、电子商务、数字城市、数字省区和数字地球的工程化和现实化,需要采集多种实时地理空间数据,因此,中国发展CORS系统的紧迫性和必要性越来越突出。几年来,国内不同行业已经陆续建立了一些专业性的卫星定位连续运行网络,目前,为满足国民经济建设信息化的需要,一大批城市、省区和行业正在筹划建立类似的连续运行网络系统,一个连续运行参考站网络系统的建设高潮正在到来。

深圳市建立了我国第一个连续运行参考站系统(SZCORS),目前已开始全面地测量应用。全国大多省、市也已初步建成或正在建立类似的省、市级CORS系统,如:广东省、江苏省、北京、天津、上海、成都、武汉、昆明、重庆等。

目前,这些高精度的GPS网可以作为我国的基础大地控制网。地壳运动观测网络中连续观测的基准站可为GPS测量提供同步观测数据,并作为起算点,使GPS测量更方便、作业效率更高。

二、卫星大地控制网的建立

为了得到可靠的观测成果,必须对三维控制网进行科学的技术设计。VLBI、SLR等三维控制网的建立通常是在全球范围内根据需要由国际组织协商进行选点并建立,其过程比较复杂且漫长。因而通常所说的卫星大地控制网是指用于工程应用的三维控制网,具体是指GPS控制网。下面仅介绍GPS控制网的布设原则、技术设计等问题。

(一)GPS控制网的布设原则

1. 分级布网的原则

分级布设GPS网,有利于根据测区的近期需要和远期发展分阶段布设。而且可以使全网的结构呈长短边相结合的形式。与全网均由短边构成的全面网相比,可以减少网的边缘处误差的积累,也便于GPS网的数据处理和成果检核分阶段进行。

例如首先在全国范围内用GPS建立一个高精度的稀疏骨架控制网(A级、B级网或一级、二级网),在以上控制网基础上根据需要的测区再进一步用GPS或常规的方法加密。在进一步加密时,应用GPS技术可以不预先作全面的大地网,而是按照用户所需要的精度要求随用随做。可以使用GPS测量从几百公里以外直接获取已知点。这样既能节省大量的人力、物力

资源、又满足了实际生产的需要。

2. *密度原则*

各种不同的任务要求和服务对象，对 GPS 网的布设有不同的要求。例如，国家特级网(AA 级)基准点主要用于提供国家级基准，用于定轨、精密星历计算和大范围大地变形监测等，其平均距离为几百公里。而一般工程测量所需要的网点则应满足测图加密和工程测量，平均边长为几公里，甚至更短(几百米以内)。综合以上因素，国家标准对 GPS 网中两相邻点间距离视其需要做出了规定：各级 GPS 相邻点间平均距离应符合表 3-4 中所列数据要求，相邻点间最小距离可为平均距离的 1/3～1/2，最大距离可为平均距离的 2～3 倍。在特殊情况下，个别点的间距也可结合任务和服务对象，对 GPS 点分布要求做出具体的规定。

3. *精度原则*

在 GPS 网的设计中，应根据测区大小和 GPS 网的用途，来设计网的等级和精度标准。一般 GPS 测量的精度标准通常用网中相邻点之间的距离中误差表示，其形式为

$$\sigma = \pm \sqrt{a^2 + (b \cdot d)^2} \tag{3-2}$$

式中，σ 为距离中误差(mm)；a 为固定误差(mm)；b 为比例误差系数(10^{-6})；d 为相邻点的距离(km)。

国家和军队的测绘局分别制定了“GPS 测量规范”，将测量精度分为若干个级别。如国家的 GPS 测量规范分为 AA、A、B、C、D、E 六级(见表 3-4)，表中分别列取了不同级 GPS 网的点间距离和精度指标。

表 3-4 GPS 控制网的精度及密度原则

项目＼级别	AA	A	B	C	D	E
固定误差 a /mm	≤3	≤5	≤8	≤10	≤10	≤10
比例误差系数 b /10^{-6}	≤0.01	≤0.1	≤1	≤5	≤10	≤20
相邻点平均距离/km	1 000	300	70	15～10	10～5	0.2～5

(二)GPS 控制网的技术设计

1. *GPS 控制网的基准设计*

GPS 控制网的基准设计是实施 GPS 测量的基础性工作，它是在网的精确性、可靠性和经济性方面，寻求 GPS 控制网基准设计的最佳方案。通过 GPS 测量可以获得地面点间的 GPS 基线向量，它属于 WGS 84 坐标系或 ITRF 的三维坐标。在实际工程应用中，我们需要的是国家坐标系(1954 北京坐标系、1980 西安坐标系、2000 国家大地坐标系)或地方独立坐标系的坐标。为此，在 GPS 网的技术设计中，必须说明 GPS 网的成果所采用的坐标系统和起算数据，即明确 GPS 网所采用的基准。通常将这项工作称为 GPS 网的基准设计。

GPS 网的基准包括位置基准、方位基准和尺度基准。GPS 网的位置基准，通常都是由给定的起算点坐标确定。方位基准可以通过给定起算方位角值确定，也可以由 GPS 基线向量的方位作为方位基准，尺度基准可以由地面的电磁波测距边确定，或由两个以上的起算点之间的距离确定，也可以由 GPS 基线向量的距离确定。因此，GPS 网的基准设计，实质上主要是确定网的位置基准问题。

2. *选点*

由于 GPS 观测站之间不要求相互通视，所以选点工作较常规测量要简便得多。因为 GPS

点点位的选择，对 GPS 观测工作的顺利进行并得到可靠的效果有重要影响，所以，应根据测量任务的目的和测区范围、精度和密度的要求，充分收集和了解测区的地理情况，及原有控制点的分布和保存情况，以便恰当地选定 GPS 点的点位。在选定 GPS 点点位时应遵守以下原则：

(1)点位周围应便于安置天线和 GPS 接收机。视野开阔，视野周围障碍物的高度角一般应小于 15°。

(2)点位应远离大功率无线电发射源及高压电线，以避免周围磁场对信号的干扰。

(3)点位周围不应有对电磁波强烈反射(或吸收)的物体，以减弱多路径效应的影响。

(4)点位应选在交通方便的地方，以提高作业效率。

(5)选定点位时，应考虑便于用其他测量手段联测和扩展。

(6)点位应选在地面基础坚固的地方，以便于保存。

此外，有时还需要考虑点位附近的通信设施、电力供应等情况，以便于各点之间的联络和设备用电。

(7)在利用旧点时，应检查标石的完整性和稳定性。

3. GPS 点位标志

为了长期地保存点位，GPS 控制点一般应设置在具有中心标志的标石上以精确标志点位。标石和标志必须稳定、坚固。其标石可以深埋地下也可以建造观测墩或带有强制归心装置的观测墩。有关标石的构造、类型和建造方法可参阅 § 3-1 和有关规范。

(三)GPS 控制网的测量作业

GPS 测量包括野外观测和内业数据处理，野外观测工作包括天线安置、观测作业、外业成果记录等，内业数据处理包括仪器数据提取、基线解算和 GPS 三维控制网的平差计算等。这里仅对野外观测工作做简要叙述。而测量数据提取和内业数据处理可参见随机说明及其他有关资料。

1. 天线安置

天线的精确安置是实现精密定位的前提条件之一。天线安置应符合下列要求：

(1)一般情况下，天线应尽量利用三脚架安置在标志中心的垂线方向上，直接对中。在特殊情况下，才可进行偏心观测，其归心元素应以解析法精密测定。

(2)需在觇标的基板上安置天线时，为防止对信号的干扰，应将觇标顶拆除，并将标志中心投影到基板上，依投影点安置天线。

(3)当点上建有寻常标，但测站间的距离不超过 10 km，可以在觇标下安置天线，但应适当延长观测时间。

(4)天线定向标志线应指向正北，并顾及当地磁偏角的影响，定向误差不应大于±5°。

(5)天线底板上的圆水准气泡必须居中。

(6)雷雨天气安置天线时，应注意将其底盘接地，以防雷击。在雷雨过境时应暂时关机停测，卸下天线。

天线安置后，应在各观测时段的前后各量取天线高一次。两次量高之差不应大于 3 mm。取平均值作为最后天线高。若互差超限，应查明原因，提出处理意见，记入观测记录。

天线高是指观测时天线平均相位中心至测站中心标志面的高度，分为上、下两段：上段是从相位中心至天线底面的高度，这是常数，由厂家给出；下段是从天线底面至测站中心标志面的高度，由用户现场量取。具体量取方法，依天线安置方法和类型的不同分为直接测量和斜距

测量两种(见接收机使用手册)。天线高的最后取值为上下两段之和。

2. 观测作业

观测作业的主要任务是捕获 GPS 卫星信号对其进行跟踪、接收和处理,以获取所需的定位和观测数据。

GPS 接收机操作的自动化程度高,其具体的操作方法和步骤因接收机类型和作业模式不同而异,在随机的操作手册中都有详细的介绍。作业时,观测人员只需按操作手册执行即可,一般应注意以下几点:

(1)各接收机的观测员应按观测计划规定的时间作业,确保同步观测同一组卫星。

(2)在确认外接电源电缆及天线等各项连接无误后,才可接通电源。在接收机预置状态正确时,才可启动接收机。

(3)开机后接收机的仪表数据显示正常时,才能进行自测试和输入有关测站和时段控制信息。

(4)接收机开始记录数据后,观测员应使用功能键和选择菜单,注意查看测站信息、接收卫星数量、卫星号、各通道信噪比、相位测量残差、实时定位的结果及其变化和存储介质记录等情况。

(5)在一个观测时段中,接收机不得关闭并重新启动;不准改变卫星高度角的限值和天线高;观测员应注意防止接收设备震动,更不得移动;不得碰动天线或阻挡信号。

(6)经检查所有作业项目均按规定完成并符合要求,方可迁站。

(7)在进行长距离高等级 GPS 测量时,还要按规定测量气象元素。

3. 观测记录

观测记录由 GPS 接收机自动形成,并记录在存储介质上,其内容有:载波相位观测值;伪距观测值;相应的 GPS 时间;GPS 卫星星历及卫星钟差参数;测站初始信息,包括测站点名和点号、时段号、近似坐标、天线高等,测站信息通常是先由观测人员输入接收机或在测量手簿上人工记录。

§3-4 重力基准与重力控制网

为了快速进行重力测量,通常需要进行大量的相对重力测量。因此必须有属于统一系统的已知重力值的起始点。如果这些点的重力值是用绝对重力测量求定,这样的点就是重力基准点,其重力值称为重力基准值。重力基准是由一系列重力基准点布网形成的。同三维控制网、水平控制网和高程控制网一样,重力控制网的建立也是大地测量基准建设的一项基础性工程。高精度重力网的建立对确定和精化地球重力场及大地水准面都有极为重要的作用。本节将主要介绍重力测量的基准、我国的重力基本网及重力网的建立等内容。

一、重力基准

重力基准是指绝对重力值已知的重力点。作为相对重力测量(测定两点间重力差的重力测量)的起始点,这个起始点也称为重力原点。经国际测量组织认可的起始重力点称为国际重力基准。各国进行重力测量时都尽量与国际重力基准相联系,以检验其重力测量的精度并保证测量成果的统一。国际通用的重力基准有 1900 年的维也纳重力基准、1909 年波茨坦重力

测量基准、1971 年的国际重力基准网(IGSN71)以及 1987 年的国际绝对重力基本网(IAGBN)。下面分别简要介绍。

1900 年在巴黎举行的国际大地测量协会会议上,决定采用维也纳重力基准,即以奥地利维也纳天文台的重力值为基准,其值为 $g=(981.290\pm0.01)\times10^{-2}\mathrm{ms}^{-2}$。此值是 Oppolzer 在 1884 年用可倒摆绝对重力测量方法测定的。

1909 年国际大地测量协会在伦敦举行,会议上决定废除维也纳重力基准,启用波茨坦重力基准。以德国波茨坦大地测量研究所摆仪厅的重力值作为基准,代替过去的维也纳重力基准,其值为 $g=(981.274\pm0.003)\times10^{-2}\mathrm{ms}^{-2}$,此值是 1898～1906 年由 Kuhnen 和 Furtwangler 用可倒摆测定的。波茨坦重力基准应用范围最广,世界上凡进行重力测量的国家几乎都采用波茨坦重力基准,该基准被采用了 60 年。

随着科技的进步,对重力测量的精度不断提出新的要求。1930 年以后,一些国家先后进行了绝对重力仪的研制和测量,世界上的绝对重力点多起来,用相对重力仪将新的绝对重力点与波茨坦重力基准联测结果证明,波茨坦的重力值有较大的系统误差,误差约 $(12\sim16)\times10^{-5}\mathrm{ms}^{-2}$。1967 年国际大地测量协会决定对波茨坦重力值采用 $-14\times10^{-5}\mathrm{ms}^{-2}$ 的改正值。1968～1969 年,在波茨坦重力原点又进行了一次新可倒摆绝对重力测量,测量精度达到 $\pm0.3\times10^{-5}\mathrm{ms}^{-2}$,比先前提高了一个数量级,观量结果与原重力值相差 $-13.9\times10^{-5}\mathrm{ms}^{-2}$。

1971 年在莫斯科举行的国际大地测量与地球物理联合会(IUGG)第 15 届大会上通过决议,决定废止波茨坦重力原点,建立 1971 年国际重力基准网(IGSN71),作为新一代的国际重力测量基准。

IGSN71 是全球范围的重力基准网,包括 1 854 个重力点,其中绝对重力点 10 个,分别用三种绝对重力仪测定。25 200 多个相对重力仪测量点,其中有 1 200 多个摆仪观测点,其余为重力仪测量点。将观测结果整体平差后,分别求出了 1 854 个点的重力值,96 个重力仪尺度因子和 26 个仪器(摆仪和重力仪)零漂率。平差后各点重力值精度为 $\pm0.1\times10^{-5}\mathrm{ms}^{-2}$,每个点都可作为重力测量起算点,从而以多点基准结束了单点基准(由一个重力原点起算)的历史。

随着高精度测时和测距技术的进步,20 世纪 70 年代前后,利用自由落体测量绝对重力的仪器在一些国家研制成功,重力测量精度大大提高,许多国家着手建立本国的重力控制网,而不需要以 IGSN71 的点作为重力起算点,故该网实际上已经不起控制作用。由于几个 μGal $(10^{-8}\mathrm{ms}^{-2})$ 的精度对研究全球重点场变化有重要作用,再加上绝对重力仪都有一定的系统误差,所以,统一全球的绝对重力基准仍有必要。

IGSN71 建立后,经过一段时间研究和准备,于 1982 年提出了国际绝对重力基本网(IAGBN)的布设方案。1983 年在 IUGG 第 18 届大会上,决定建立国际绝对重力基准网(IAGBN)取代 IGSN71。IAGBN 的主要任务是长期监测重力随时间的变化,其次是作为重力测量的基准,以及为重力仪标定提供条件。国际大地测量协会设立了专题研究组,对绝对重力选址提出了严格条件。这些点建立后按规则间隔年数进行重复观测。IAGBN 分为 A、B 两类点。A 类点是根据点位选择要求和布设方案选定的,共计 36 个点,其中有南极大陆一个点;B 类点是为了某些历史原因或照顾某些国家的愿望而设立的。1987 年 IUGG 第 19 届大会曾通过决议,建议着手实施。大部分点已进行了一次或数次观测,但是由于种种原因,目前尚未完全实现。我国有 IAGBN 的 A 类点 2 个,分别在北京和南宁。表 3-5 为国际重力基准的基本

情况。

表 3-5 国际重力基准情况

名称	测量年代/年	使用年代/年	精度/(ms^{-2})
维也纳重力基准	1884	1900～1908	$\pm10\times10^{-5}$
波茨坦重力基准	1898～1904	1909～1971	$\pm3\times10^{-5}$
1971 国际标准重力网	1950～1970	1971～1983	$\pm0.1\times10^{-5}$
国际绝对重力基准网	1983 年开始建立		$\pm0.01\times10^{-5}$

二、我国重力基本网

19 世纪末，外国人在我国上海及西南地区用弹性摆进行了重力测量。20 世纪 30 年代，北平研究院物理研究所也用弹性摆进行了重力测量。之后，上海石油局在上海附近用重力仪测了一些重力点。截止解放前，大约只测了 200 多个重力点，精度 5～$10\times10^{-5}ms^{-2}$，分布地区十分有限，没能建立重力基本网。新中国成立后为满足各方面需要，先后建立过三代重力基本网，即 1957 国家重力基本网和 1985 国家重力基本网，2000 国家重力基本网是第三代国家重力基本网。

(一)1957 国家重力基本网

1956～1957 年，为了适应全国天文大地控制网数据处理对高程异常和垂线偏差的需要，我国同苏联合作建立了我国第一代重力基本网。当时没有进行绝对重力测量，基准点重力值从莫斯科经由伊尔库茨克、阿拉木图和赤塔 3 个基本点用航空联测方法，用 9 台相对重力仪联测到北京西郊机场。在此之前，苏联航空重力队曾在波茨坦和莫斯科之间进行联测。北京西郊机场上的重力点是我国第一个重力原点，其重力属于波茨坦重力系统，相对于波茨坦国际重力原点的精度为$\pm0.51\times10^{-5}ms^{-2}$。与此同时，在全国布设了 27 个重力基本点和 82 个一等重力点，基本重力点的联测精度为$\pm0.15\times10^{-5}ms^{-2}$，一等点的精度为$\pm0.25\times10^{-5}ms^{-2}$，这些点一并平差处理，构成 1957 国家重力基本网，简称“57 网”。其基本点相对于北京重力原点的误差不大于$\pm0.32\times10^{-5}ms^{-2}$，一等点不大于$\pm0.40\times10^{-5}ms^{-2}$。该网的基准是由苏联重力网的三个基本点引入的，属于波茨坦系统。

“57 网”建立后的近 30 年间，有关部门共施测了数以万计的不同等级的重力点，这些重力点在国民经济建设和国防建设中发挥了重要作用。

20 世纪 70 年代初，中国计量科学院研制成功自由落体绝对重力仪，进行了我国首次绝对重力测量，与北京重力原点联测，证明原值大了 $13.5\times10^{-5}ms^{-2}$。因此，在生产中凡采用波茨坦重力系统重力时，一律改正$-13.5\times10^{-5}ms^{-2}$。有些单位则直接采用国际有关组织决定，对波茨坦重力系统的重力值加$-14.0\times10^{-5}ms^{-2}$改正数。

(二)1985 国家重力基本网

我国“57 网”存在的问题主要是没有绝对重力点(统称为基准点)；重力系统由波茨坦辗转联测过来，当时相对重力仪测量精度不高，而且波茨坦重力系统已经废止，以 IGSN71 代之，我国还没有纳入这个新系统，因此有必要建立第二代国家重力基本网。

1981 年，根据中国和意大利科技合作协议，中意合作利用意大利计量院的自由落体绝对重力仪在我国测了 11 个绝对重力点。1983～1984 年，由国家测绘总局组织，地质矿产部、石油部、国家地震局、国家计量局、总参测绘局、中国科学院测量与地球物理研究所等有关部门参

加，开展了国家重力基本网的联测。整个测量分为两期，使用了9台LCR-G型重力仪，按照《国家重力基本网野外作业规定(试行)》进行。相对联测要求每条测线不得少于2台仪器的4个联测结果，平均值中误差一般不得大于$\pm15\times10^{-5}ms^{-2}$。同时，用6台LCR-G型重力仪进行了北京、上海和巴黎、东京、京都和香港的国际联测，使我国重力基本网与国际绝对重力点、IGSN71点、日本环太平洋国际重力联测点相互连接。

平差于1985年由国家测绘局测绘科学研究院完成。已知点有北京、上海、青岛、福州、南宁、昆明。考虑到这6个基准点分布不均，其最大重力范围只占全网重力范围的65%，因此，还利用巴黎、东京A、东京B、京都、香港5个重力点，共11个点作为已知点。平差时观测值加入了仪器计数化算、仪器高度、固体潮和气压改正，按不等权间接平差方法进行。国家重力基本网由6个基准点、46个基本点和5个基本点引点组成，简称为"85网"。该网不但改善了图形结构，提供了外部精度标准，而且使"85网"与IGSN71有了较紧密的连接，使"85网"的重力系统纳入IGSN71系统。

"85网"整体平差的单位权中误差为$\pm15\times10^{-8}ms^{-2}$，点重力值中误差(内部符合)为$\pm8\sim\pm13\times10^{-8}ms^{-2}$，经外部符合检核，发现重力值中有一定的系统性影响，所以"85网"重力值的精度被认为是在$\pm20\times10^{-8}ms^{-2}$到$\pm30\times10^{-8}ms^{-2}$之间。

"85网"是我国第二个国家重力控制网，包括基本网和一等网。其重力基准是由国内的多台绝对重力仪观测值和国际的已知重力系统共同定义的。必须指出，国际重力点的基准值，有的是绝对观测值，有的是IGSN71系统，有的是日本环太平洋联测系统。现在回头看，这种共同定义的"85网"重力基准，并不是完全由国内的绝对重力点来独立定义的，只能说是综合性的。

(三)2000国家重力基本网

我国"85网"较之于"57网"，在精度上提高了一个数量级，消除了波茨坦系统的误差，增大了基本点的密度。它作为我国基本重力控制网提供使用后，十几年来在测绘、地质、地震、石油、国防等领域发挥了重要作用。但是，随着时间的推移，经济建设迅速发展，使"85网"基本点因受损而不便使用或不能使用。据调查统计，有2/3以上的"85网"重力基本点不能使用。另一方面，由于受当时设备、技术等方面的限制，"85网"绝对重力点的观测精度较低，点位分布不均匀，图形结构不尽合理。由此可见，"85网"的这种状况已不能充分发挥国家重力基准应有的作用。

我国引进的精度达到$(3\sim5)\times10^{-8}ms^{-2}$的FG5绝对重力仪，在中国地壳运动观测网基准点上施测精度很高，为我国独立建立新一代更高精度的重力基准提供了技术手段。另外从国际重力基准的变化来看，已决定建立国际绝对重力基准网。而"85网"仍属于IGSN71重力系统。从以上各方面分析，有必要建立新一代国家基本重力网(即2000国家重力基本网)。

1998年由国家测绘局发起，总参测绘局和中国地震局参加，开始共同建立2000国家重力基本网，简称"2000网"。经过近三年的艰苦努力，于2002年圆满完成了2000国家重力基本网的建立工作。2000国家重力基本网由147个点组成。其中基准点21个，基本点126个；另有引点112个，城市地面联测点66个。其点位分布如图3-27所示。

2000国家重力基本网平差后的精度指标为：基本网中重力点平均中误差为$\pm7.35\times10^{-8}ms^{-2}$；其中具有绝对重力观测成果的基准点平均中误差$\pm2.3\times10^{-8}ms^{-2}$；基本点平均中误差$\pm6.6\times10^{-8}ms^{-2}$；基本点引点平均中误差$\pm8.7\times10^{-8}ms^{-2}$。8个国家重力仪

格值标定场的 64 个重力点平均中误差为$\pm 3.4\times 10^{-8}ms^{-2}$。2000 网联测的 85 网和地壳运动网等其他 66 个重力点平均中误差$\pm 9.5\times 10^{-8}ms^{-2}$。

2000 国家重力基本网是由基准点、基本点、引点以及长基线、短基线构成，并对已有的“85 网”点进行了联测，网形结构合理，充分考虑了国家基础建设、国防建设和防震减灾等方面的需要，种类齐全，功能完备，设计科学合理。该网精度高，覆盖范围大，点数多，点位顾及了我国实际情况，额度适宜，分布基本均匀。建网中采用了多项国内外先进技术和现代作业方式。该网数据处理理论方法严密，技术先进，平差结果可靠，精度真实可信，与“85 网”相比具有质的飞跃。表 3-6 为我国重力建网的基本情况。

表 3-6 我国重力网基本简况

名 称	点 数			测量精度/($10^{-5}ms^{-2}$)		系 统
	基准点	基本点	一等点	基准点	基本点	
1957 国家重力基本网		21	82		±0.15	波茨坦系统
1985 国家重力基本网	6	46		±0.01	±0.02	IGSN71
2000 国家重力基本网	21	126		±0.005	±0.01	绝对重力系统

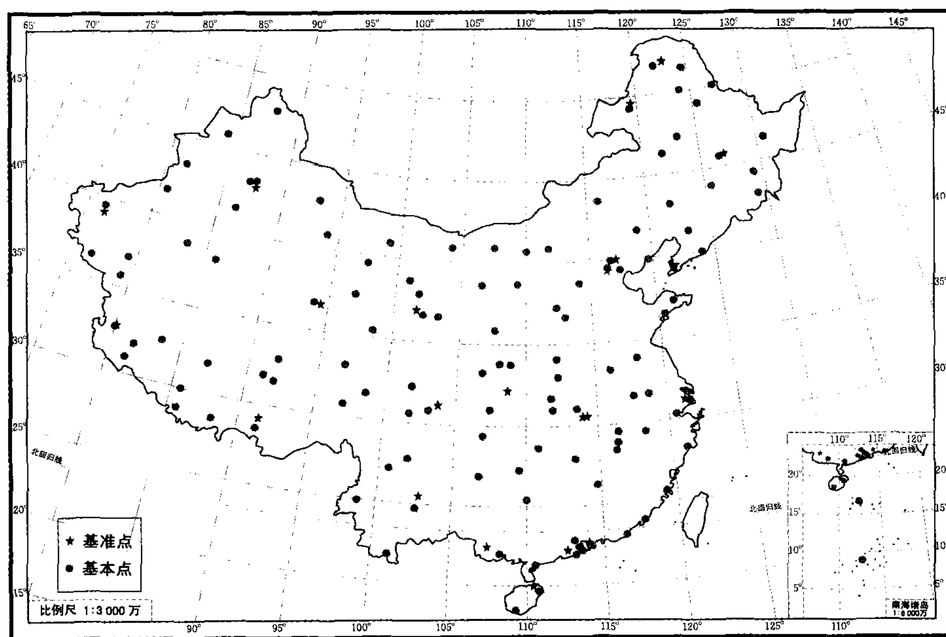


图 3-27 2000 国家重力基本网点分布图

三、国家重力网的建立

重力测量分为绝对重力测量和相对重力测量，前者由于设备大，造价高，主要用于少量重力基准点的重力测量；后者是用于重力测量的最基本的方法，它被广泛应用于测定地球表面上的重力值。这里将主要讨论由相对重力测量建立重力网的方案及方法。

(一)建立国家重力网的基本原则

(1)国家重力网应覆盖我国各省、自治区、直辖市、南海海域、香港及澳门特别行政区；

(2)网中绝对重力点的分布应当均匀；

(3)重力点的布设既要顾及经济发展的需要，同时兼顾国防建设和防震减灾方面需要；

(4)联测线路的网形结构要进行优化设计；

(5)新建的重力网点应尽可能与老的网点及地壳运动观测网络基本网(见图 3-26)衔接连测。

在以上原则基础上我国先后建立了 1957 年、1985 年国家重力基本网及 2000 国家重力基本网。下面仅讨论区域性重力网的建网方案。

(二)重力网建立的方案

根据重力测量的用途和精度，可将重力测量分成两大类，即重力控制测量和加密重力测量。前者的任务是建立控制网，它包括基本重力点、一等重力点和二等重力点三个等级。后者则是在重力控制点的基础上，根据各单位、部门特殊任务的需要所进行的加密重力测量。级别不同，重力测量联测方法及使用的仪器均有所不同，下面将分别进行讨论。

为了在一个国家或地区进行重力测量，获取详细的重力场数据，必须先建立国家重力控制网。它为局部地区的重力测量提供起始数据，且可控制重力测量误差的积累。如前所述，我国已先后建立了 1957 年、1985 年和 2000 年国家重力基本网，这就为开展全国范围内的相对重力测量提供了起始基准。由于我国幅员辽阔，仅靠 2000 国家重力基本网中的少量重力控制点显然是不够的，还需在 2000 国家重力基本网的基础上进一步扩展一等重力网。

一等重力点是从“2000 网”基本重力点为起始控制点，采取多测线逐点推进的方法，联测若干待定点，最后闭合到另一基本点，作为附合路线(见图 3-28)，或者闭合到原基本点，这种称为闭合路线(见图 3-29)。

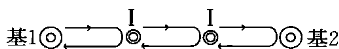


图 3-28　重力测量附合路线

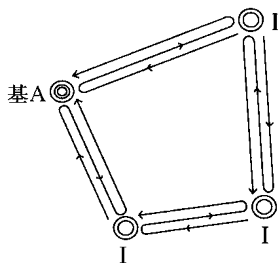


图 3-29　重力测量闭合路线

一等重力网的点距为 300 km 左右，沿着主要交通路线推进。闭合环线或闭合路线中的测段数要求不超过 5 段，测段重力差的联测中误差要求不超过 ±25 μGal 重力值中误差不超过 ±60 μGal。一等重力测量要求使用 LCR-G 型重力仪或精度相当的其他精密重力仪，必须在国家重力基本点间或国家级重力仪格值标定场标定仪器常数和参数。

二等重力点是在基本网和一等网基础上的进一步扩展，主要目的是为加密重力测量提供有效的控制。因此二等重力点的布设方法和密度可视加密重力测量的需要而定。要求以高等重力点及其引点作为起始点，按闭合(附合)路线形式进行布设，路线中的测段数一般不能超过 5 段，但困难地区可放宽到 8 段。也可从一等以上的重力点开始，发展 1～2 个测段的二等支线点。

加密重力点布设，根据不同的需要及施测地区重力场的复杂程度而定。加密重力点的特点是密度大、点距小，精度较低。因此，可以采用目前装备的任何型号的重力仪。用汽车运载两台仪器观测一测线即可满足要求。

确定重力点的坐标和高程是相对重力测量工作的重要部分，因为坐标、高程的精度直接影响重力点重力异常的精度。重力点的高程中误差，现行规范规定不得超过±2 m；而坐标中误差则视具体情况而定，对于实测坐标应不超过±5 m，对于 $1' \times 1'$ 和 $5' \times 5'$ 网格内重力点应不超过±10 m，对于重力控制点和大于 $5' \times 5'$ 网格内重力点可不超过±100 m。

如果重力点重合于国家大地网的各级控制点和国家各级水准点，它们的坐标和高程就可直接使用。否则就需做实地测量，测定可用 GPS 测量、导线测量、水准测量、三角高程导线等方法确定重力点的坐标和高程。

有关重力网建立过程中的具体实施方法及过程这里不再详细讨论，可参见有关文献。

第四章　大地水准面与高程系统

地球形状理论(地球重力场理论)是确定大地测量基准面的依据。地球形状的概念是多义的。通常把地球的真实形状理解为地球的自然表面,即大陆地面、无干扰海洋和湖泊的表面,野外测量工作就是在这个面上进行的。但是大地测量学的任务并不包括获得地球自然表面形状的连续表示形式,这是地图制图学、航空(天)摄影测量学和地形测量学等学科研究的对象。在大地测量学中所指的地球形状是指对其真实形状进行数学或物理抽象后的形体,包括大地水准面、参考椭球面和正常椭球。可以把大地水准面理解为地球的物理化形状,把参考椭球面理解为地球的数学化形状,把正常椭球理解为地球的数学物理化形状。参考椭球或正常椭球是对大地水准面的近似,因而在大地测量学中研究的地球形体主要是指大地水准面的形状。大地水准面又是地面点高程的起算面。由于大地水准面是地球重力场中的一个水准面,故在处理水准测量数据时必须顾及地球重力场理论的特点。选择不同的高程基准面、线就构成了不同的高程系统。

本章介绍了地球重力场理论的基本概念,讨论了高程系统的定义并建立了各高程系统间的转换关系。

§4-1　地球重力位与大地水准面

一、重力与重力位

根据牛顿万有引力定律,宇宙间的任意两质点之间都具有相互作用的吸引力 $\boldsymbol{F}$,在其周围空间就形成了一个引力场。$\boldsymbol{F}$ 的大小与两质点的质量 m 和 m' 的乘积成正比,与两质点之间的距离 r 的平方成反比,用公式表示为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{fmm'}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4-1}$$

式中,f 为一比例系数,称为引力常数,通过实验的方法求得,其值为$(6.673\pm0.03)\times10^{-8}$ $\mathrm{cm^3g^{-1}s^{-2}}$;$\boldsymbol{r}$ 的方向取吸引点指向被吸引点,见图 4-1。

大地测量学中,把质量为 m 的质点称为吸引质点,另一质量为 m' 的质点称为被吸引质点,并取其质量为一个单位,即 $m'=1$。于是

$$\boldsymbol{F}=-\frac{fm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4-2}$$

地球可视为由无穷多个连续质点组成的质体,按照积分的概念,地球对单位质点的引力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$\boldsymbol{F}=-f\int_{(M)}\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\mathrm{d}m \tag{4-3}$$

式中,$\mathrm{d}m$ 是地球的单元质量;$\boldsymbol{r}$ 为 $\mathrm{d}m$ 至被吸引点的距离,在积分过程中是个变量;积分区域为

整个地球质量(M);引力方向指向球心。

由于地球本身在作自转运动,故地球上每一点都存在一个惯性离心力。这个离心力 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \tag{4-4}$$

式中,$\boldsymbol{\rho}$ 是单位质点至地球旋转轴的垂直距离;$\boldsymbol{\omega}$ 是地球自转的角速度,可以用天文方法精确测定,其值为 $\omega = 7.292\,115 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$。$\boldsymbol{P}$ 垂直于旋转轴,且方向背向旋转轴,见图 4-2。

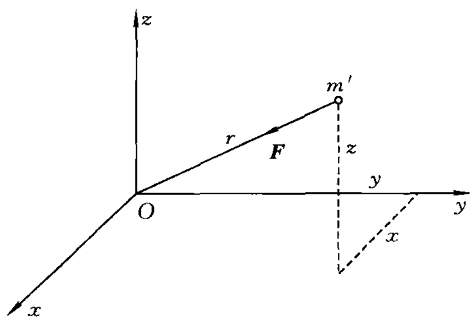


图 4-1 吸引点和被吸引点

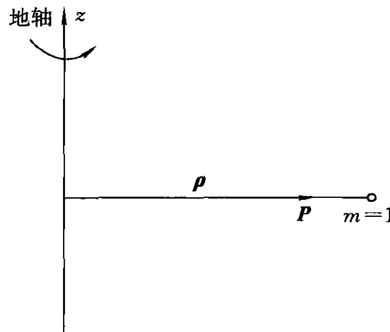


图 4-2 离心力

地球重力 $\boldsymbol{g}$ 就是单位质点所受的地球引力和地球离心力的合力,即

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} \tag{4-5}$$

由于物体受力产生的加速度与其质量的乘积就等于所受的力,于是对于一个单位质点,作用于其上的重力在数值上等于使它所产生的重力加速度的值。因此,在大地测量学中,总是将重力和重力加速度这两个概念通用。我们说“测定一点的重力”实质上是说测定一点的重力加速度,说“一点的重力有多大”实质上是说这点的重力加速度多大。重力加速度的单位为“厘米/秒^2”($\mathrm{cm/s^{-2}}$),在大地测量学中简称为“伽”,它的千分之一称为毫伽,毫伽的千分之一称为微伽,即如下式

$$1\ \mathrm{Gal} = 1\,000\ \mathrm{mGal} = 1\,000\,000\ \mu\mathrm{Gal}$$

$$1\ \mathrm{mGal} = 10^{-5}\,\mathrm{ms^{-2}}$$

力是向量,不便于直接研究。但是,人们发现对于保守力可以找到一个相应的数量函数,这个函数对各坐标轴的偏导数等于力在相应坐标轴上的分量,称为力的位函数。显然,只要已知了位函数就可以已知力了,因此可以用研究力的位函数来代替力的研究。引力、离心力和重力都有相应的位函数。

所谓引力位函数,就是一个以点位坐标(x,y,z)为变量的数量函数,它对三个坐标轴的偏导数分别等于引力 F 在这三个方向上的分量 F_x,F_y,F_z,即

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= F_z \end{aligned}\right\} \tag{4-6}$$

质体对外部点的引力位公式可以从质点引力位公式导出,所以我们先讨论质点引力位公式。

如图 4-1 所示,m 为吸引点质量,它的坐标为(0,0,0);m' 为被吸引点,它的坐标为

(x,y,z)；它们之间的距离 r 为

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

取一数量函数

$$V_{(x,y,z)}=\frac{fm}{r} \tag{4-7}$$

显然

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=fm\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{fm}{r^2}\frac{x}{r}\\\frac{\partial V}{\partial y}&=fm\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{fm}{r^2}\frac{y}{r}\\\frac{\partial V}{\partial z}&=fm\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{fm}{r^2}\frac{z}{r}\end{aligned}\right\} \tag{4-8}$$

将这些结果与式(4-2)相比较，可知式(4-8)即为引力 F 在三个坐标轴上的分力。这说明式(4-8)所示的数量函数 V 就是质点引力位函数。

可以证明，力的位函数对任意方向的导数等于力在该方向的分力。例如，式(4-7)对 r 方向的偏导数为

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{fm}{r^2}$$

即为万有引力值。

为了进一步弄清 V 的物理意义，在图 4-1 中设单位质点 m' 从 B_1 点(距离 r_1)移至 B_2 点(距离 r_2)，则引力所做的功为

$$A=\int_{B_1}^{B_2}-\frac{fm}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{fm}{r_2}-\frac{fm}{r_1}$$

式中，$\mathrm{d}r$ 为力的方向上的位移。上式表明，两点的位差就是力将单位质点从一点移至另一点所做的功，即位的增量等于力所做的功。如果在 B_1 处的位值为 0，则从上式可以得出结论：空间一点的位等于力将单位质点从位为零的地方移至该点所做的功。

对于有很多个点质量组成的质点系，则它的引力位是各个质量 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的引力位式(4-7)的总和，即

$$V=\frac{fm_1}{r_1}+\frac{fm_2}{r_2}+\cdots+\frac{fm_n}{r_n}=f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i} \tag{4-9}$$

质体内部的质点是连续分布的，故只需将式(4-9)的求和变成积分，就得到质体引力位公式

$$V=f\int_{(M)}\frac{\mathrm{d}m}{r} \tag{4-10}$$

式中，$\mathrm{d}m$ 为单元质量，它的坐标为(ξ,η,ζ)，在积分过程中是个变量，见图 4-3；$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ 为 $\mathrm{d}m$ 至被吸引点的距离；积分区域为整个质体(M)。

由于离心力的大小为

$$P=\omega^2\rho \tag{4-11}$$

式中，ω 为自转角速度；ρ 为研究点到旋转轴的垂直距离，如图 4-2。设旋转轴重合于直角坐标系的 Z 轴，则对于坐标为(x,y,z) 的研究点有

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

代入式(4-11),得

$$P = \omega^2 \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

显然它的位函数为

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{4-12}$$

重力等于引力与离心力之和,则重力位 W 等于引力位 V 与离心力位 Q 之和,即

$$W = V + Q \tag{4-13}$$

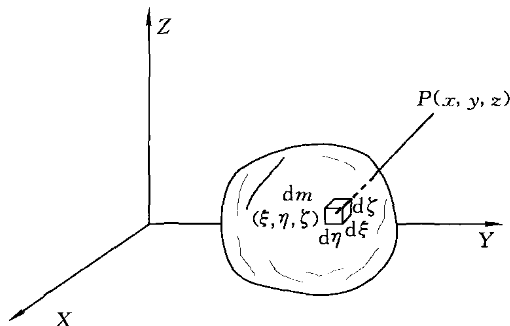


图 4-3 质体引力位

因而重力位的一般表达式为

$$W = f\int_{(M)} \frac{\mathrm{d}m}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{4-14}$$

二、地球重力场模型

可以证明,质体对外部点的引力位

$$V = f\int \frac{\mathrm{d}m}{r}$$

满足以下微分方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{4-15}$$

式(4-15)称为拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数,或称为球谐函数。

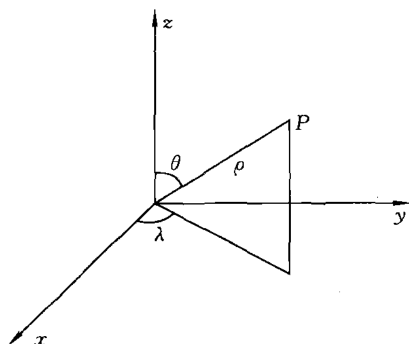


图 4-4 球坐标与直角坐标

在如图 4-4 所示的球坐标系中,P 点的直角坐标(x,y,z)与球面坐标(ρ,θ,λ)间的关系为

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\lambda \\ y &= \rho\sin\theta\sin\lambda \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

将式(4-15)转化为球坐标系中的拉普拉斯方程(略去推导),有

$$\rho^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \tag{4-16}$$

解以上微分方程(略去推导),可得球坐标系下调和函数的一般形式为

$$V(\rho,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (a_{nk}\cos k\lambda + b_{nk}\sin k\lambda) P_{nk}(\cos\theta) \tag{4-17}$$

上式即为引力位函数的级数展开式。

式(4-17)是一个级数展开式,表示地球对外部点的引力位可以用一无穷级数来描述。式中,(ρ,θ,λ) 为地球外部点的球坐标;a_{nk}、b_{nk} 为常系数,称为地球引力场参数,可由地球表面的观测值确定。因此,由式(4-17),可以说研究引力位实际上就是研究引力位系数;$P_{nk}(\cos\theta)$ 称为伴随勒让德多项式,n 称为阶,k 称为次。伴随勒让德多项式的形式为

$$P_0(\cos\theta) = 1$$
$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$
$$P_{11}(\cos\theta) = \sin\theta$$
$$P_2(\cos\theta) = \frac{3}{4}\cos2\theta + \frac{1}{4}$$
$$P_{21}(\cos\theta) = 3\cos\theta\sin\theta$$
$$P_{22}(\cos\theta) = -\frac{3}{2}\cos2\theta + \frac{3}{2}$$
$$\vdots$$

利用以下递推公式可以从 $P_0(\cos\theta)=1$、$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$ 开始推求得到高阶次的结果

$$(n-k+1)P_{n+1,k}(\cos\theta) = (2n+1)\cos\theta P_{nk}(\cos\theta) - (n+k)P_{n-1,k}(\cos\theta)$$

$$P_{nn}(\cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}(2n-1)P_{n-1,n-1}(\cos\theta)$$

常系数 a_{nk}、b_{nk} 与地球的质量分布和形状等因素有关，可以推导得

$$\left.\begin{aligned} a_{n0} &= f\int_{(M)}\rho_1^n P_n(\cos\theta_1)\mathrm{d}m \\ a_{nk} &= 2\frac{(n-k)!}{(n+k)!}f\int_{(M)}\rho_1^n P_{nk}(\cos\theta_1)\cos k\lambda_1\mathrm{d}m \\ b_{nk} &= 2\frac{(n-k)!}{(n+k)!}f\int_{(M)}\rho_1^n P_{nk}(\cos\theta_1)\sin k\lambda_1\mathrm{d}m \end{aligned}\right\} \tag{4-18}$$

式中，$(\rho_1,\theta_1,\lambda_1)$ 是 $\mathrm{d}m$ 的坐标位置(见图 4-5)。显然，通过上式可进一步分析地球引力位球谐函数展开式中各阶系数的意义。一般来说，一个无穷级数总是前几项起主要作用，我们讨论几个低阶项系数的意义。

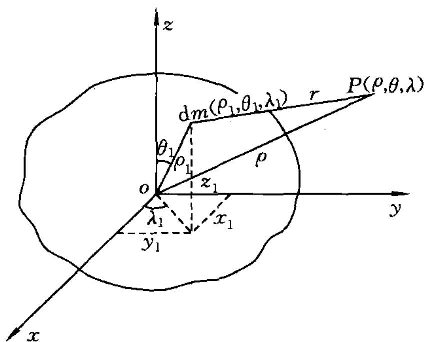


图 4-5　积分区域为整个地球

零阶项只有一个系数，即 a_{00}。因为 $\rho_1^0=1$，$P_0(\cos\theta)=1$，由式(4-18)得

$$a_{00} = fM$$

式中，M 是地球的总质量，即相当于一个球心在坐标原点、质量与地球质量相同的均质球体产生的引力位。

一阶项有三个系数，即 a_{10}、a_{11} 和 b_{11}。因为 $P_1(\cos\theta_1)=\cos\theta_1$，$P_{11}(\cos\theta_1)=\sin\theta_1$，由式(4-18)并顾及球坐标与直角坐标的关系式，得

$$a_{10} = f\int_{(M)}\rho_1\cos\theta_1\mathrm{d}m = f\int_{(M)}z_1\mathrm{d}m$$

$$a_{11} = f\int_{(M)}\rho_1\sin\theta_1\cos\lambda_1\mathrm{d}m = f\int_{(M)}x_1\mathrm{d}m$$

$$b_{11} = f\int_{(M)}\rho_1\sin\theta_1\sin\lambda_1\mathrm{d}m = f\int_{(M)}y_1\mathrm{d}m$$

设 x_0,y_0,z_0 为地球质量中心的直角坐标，根据物理学知识，有

$$\frac{\int_{(M)}x_1\mathrm{d}m}{M} = x_0,\quad \frac{\int_{(M)}y_1\mathrm{d}m}{M} = y_0,\quad \frac{\int_{(M)}z_1\mathrm{d}m}{M} = z_0$$

因而一阶项的三个系数为

$$a_{10} = fMz_0, \quad a_{11} = fMx_0, \quad b_{11} = fMy_0$$

可见,一阶项与地球质心的坐标有关,如果坐标系的原点能放在地球质心,则这一项的数值为0。

二阶项共有5个系数,即 $a_{20}, a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}$,由式(4-18)积分后得

$$a_{20} = f \cdot \left(\frac{A+B}{2} - C\right), \quad a_{22} = f \cdot \left(\frac{B-A}{4}\right)$$

式中,A、B、C 分别表示地球相对于 X, Y, Z 轴的转动惯量,即

$$A = \int_{(M)} (y_1^2 + z_1^2)\mathrm{d}m, \quad B = \int_{(M)} (x_1^2 + z_1^2)\mathrm{d}m, \quad C = \int_{(M)} (x_1^2 + y_1^2)\mathrm{d}m$$

另三个系数为 $a_{21} = f\int_{(M)} z_1 x_1 \mathrm{d}m, \quad b_{21} = f\int_{(M)} y_1 z_1 \mathrm{d}m, \quad b_{22} = \frac{1}{2} f \int_{(M)} x_1 y_1 \mathrm{d}m$

以上三个积分,分别是相对坐标轴 Y, X, Z 的乘积惯量。于是,二阶项与地球对坐标轴的转动惯量和乘积惯量有关。

三阶以上系数的情况比较复杂,这里不再讨论。

将以上所得的9个系数的表示式代入式(4-17),并将坐标系原点放在地球质心,坐标轴重合于地球的主惯性轴,由此使得一阶项系数全为0,二阶项中的 a_{21}, b_{21} 和 b_{22} 也为0,于是,地球引力位的展开式为

$$V_{(\rho,\theta,\lambda)} = \frac{fM}{\rho} + \frac{f}{\rho^3}\left[\left(\frac{A+B}{2} - C\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{3(B-A)}{4}\cos 2\lambda \sin^2\theta\right] + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (a_{nk}\cos k\lambda + b_{nk}\sin k\lambda) P_{nk}(\cos\theta)$$

实用中,往往将地球引力位的球函数级数式写成如下形式

$$V_{(\rho,\theta,\lambda)} = \frac{fM}{\rho}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n J_n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\bar{J}_{nk}\cos k\lambda + \bar{S}_{nk}\sin k\lambda)\bar{P}_{nk}(\cos\theta)\right] \tag{4-19}$$

式中,a 为所采用的地球椭球的长半轴。$\bar{P}_{nk}(\cos\theta)$ 为完全正常化的伴随勒让德多项式,与伴随勒让德多项式之间差一个常数因子

$$\bar{P}_{nk}(\cos\theta) = \sqrt{2(2n+1)\frac{(n-k)!}{(n+k)!}} P_{nk}(\cos\theta) \quad (k > 0)$$

因为伴随勒让德多项式在阶次相差较大时数值相差较大,如 $P_{21}(\cos 58°) = 1.348\,2$,$P_{88}(\cos 58°) = 542\,279$,用递推公式计算时高阶次的值会产生较大的积累误差,而 $\bar{P}_{21}(\cos 58°) = 1.740\,5$,$\bar{P}_{88}(\cos 58°) = 0.691\,3$。$J_n, \bar{J}_{nk}, \bar{S}_{nk}$ 为展开式中的系数,将式(4-19)与式(4-17)比较,可得

$$J_n = -\frac{a_{n0}}{fMa^n}$$

$$\bar{J}_{nk} = \frac{a_{nk}}{fMa^n} \cdot \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!}}$$

$$\bar{S}_{nk} = \frac{b_{nk}}{fMa^n} \cdot \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!}}$$

采用这组系数，则它们随 n 和 k 的变化的差异较小，这在实用上很方便。式(4-19)中与经度无关的系数称为带谐系数，与经度有关的系数称为田谐系数。

由于重力位 W 是引力位 V 和离心力位 Q 的和，因此将式(4-19)加上离心力位式(4-12)，即得地球重力位的数学表达式，称为地球重力场模型。

三、水准面与大地水准面

我们已经知道，由于地球自转，地球上每一点都存在一个惯性离心力；地球本身具有巨大的质量，对地球上每一点又都存在一个吸引力。因此，地球上每一点 P 都受到惯性离心力 PE 和地球引力 PF 的作用(见图 4-6)，这两个力的合力 PG 称为重力。重力的作用线称为铅垂线，重力方向称为铅垂线方向。由于地球内部物质分布不均匀和地球表面起伏的影响，各点铅垂线方向的变化很不规则，铅垂线并不是直线。

当液体处于静止状态时，其表面必处处与重力方向正交，否则液体就要流动，我们称液体静止表面为水准面。由于地球空间处处都有重力存在，所以通过不同高度的点就有不同的水准面。水准面是物理表面，因为同一水准面上的重力位相等，即质点在水准面上移动重力不做功。水准面上任一点的垂线都与这个面正交，因此水准面也叫重力等位面。

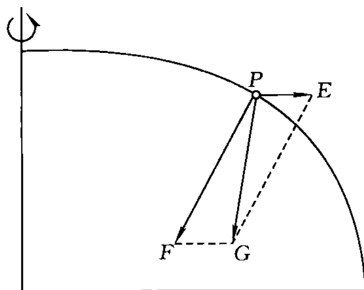


图 4-6　铅垂线方向

经纬仪测角、水准仪测高差是在仪器整平的情况下进行的。水平角观测时，经纬仪的水准器气泡要居中，这时气泡中央的切线就是一条水平线，仪器垂直轴方向就与铅垂线方向一致，水平度盘就是和水准面相切的水平面，所以实际测得的水平角是在高低不同的水准面上的角度。同样，按水准测量方法测定的高差是水准面间的铅垂线长；天文经纬度和天文方位角也是以水准面和铅垂线为基准的。因此，水准面和铅垂线是经纬仪、水准仪等光学测量仪器野外作业的基准面和基准线。

在无穷多个水准面中，我们将其中一个定义为大地水准面。

大地水准面是与平均海水面重合并伸展到大陆内部形成的水准面。大地水准面包围的形体叫做大地体。因为海洋面积占地球总面积的 71%，而大陆高出海洋的平均高度约为 800 m，大致是地球半径的万分之一，这就是说，大地体很接近于地球自然表面，同时大地水准面又具有长期稳定性，因此采用大地体来代表地球是很自然的。于是，人们将大地水准面作为高程的起算面，即研究地球自然表面形状的参考面；还将大地水准面作为地面天文经纬度、天文方位角和重力值归算的基准面。

大地水准面是个不规则的曲面。因为地球表面起伏不平，内部质量分布不匀，使得地面各点所受的引力大小和方向各不相同，从而引起地面各点铅垂线方向发生不规则变化。于是，处处与铅垂线正交的大地水准面，也就随之成为略有起伏的不规则曲面。所以，大地水准面是个物理曲面而不是数学曲面。

随着海洋学研究的深入发展，人们认识到平均海水面和大地水准面是有区别的。由于海洋受许多因素(例如温度、气压、含盐量、风力、气流、地球自转和潮汐等等)的影响，平均海水面并不是水准面，亦即不是等位面。而且，不同国家和地区根据当地验潮结果所求得的平均海水面也是不一致的。如果选取某一等位面作为标准海面，那么，各个海域的平均海水面相对于标

准海面的高低起伏，叫做海面地形，或叫海面倾斜。在全球范围内，这种起伏为 1～2 m。在我国的东部海域，也存在着南高北低的海面倾斜，其高差约为 60 cm。

由于平均海水面不是等位面，根据它来定义大地水准面就不够确切。因此人们提出用通过高程起算点（指水准零点）的重力等位面来定义大地水准面。

由位函数的性质知，重力位 W 对任意方向 s 的导数等于重力 g 在该方向的分力 g_s，即

$$\frac{dW}{ds} = g_s = g\cos(g,s) \tag{4-20}$$

若 s 方向与重力方向相垂直，此时 $\cos(g,s) = 0$，则有

$$\frac{dW}{ds} = 0$$

积分后可得

$$W_{(x,y,z)} = 常数 \tag{4-21}$$

当给右端的常数一个定值，就得一个曲面方程。因为在这个面上重力位值处处相等，故称为等位面。另外，在这个曲面上任一点所受重力的方向都与曲面相交，这样的曲面是处于均衡状态的液体表面，即为水准面。大地水准面就是过高程起算点的水准面。

应用重力位概念可以进一步研究水准面的一些性质。

在式(4-20)中，若 s 的方向为重力 g 的反方向 h，由于 $\cos(g,h) = -1$，则得

$$\frac{dW}{dh} = -g$$

亦可写为

$$dh = -\frac{dW}{g} \tag{4-22}$$

式中，dW 可视为两个无限接近的水准面之间的位差；dh 是这两个水准面之间的垂直距离。式(4-22)说明，水准面之间的距离与重力成反比。

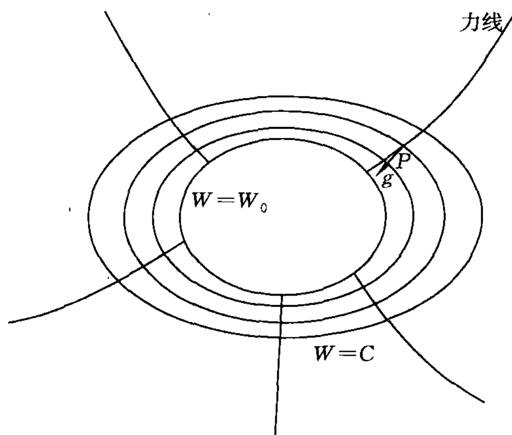


图 4-7 水准面

由于同一水准面上各处的 g 不同，所以水准面具有不平行性，图 4-7 是水准面的大致情况。另外，g 的数值是有限的值，dh 不可能为 0，所以水准面具有不相交性。但在较小的范围内，重力值变化很小，这时就可以把两个水准面视为平行。例如，在水准测量中，就认为每一站的前后标尺所在两个水准面是平行的，从而将测出的水准面之间的距离作为两点的高差。

§4-2 地球椭球与正常椭球

一、地球椭球

大地水准面是接近地球形体的一个不规则曲面，但这种不规则性很微小，因为它的起伏主要是地壳层的物质质量分布不均匀引起的，而地壳质量仅占地球总质量的 1/65。所以大地水准面在总体上应非常接近于一个规则形体，18 世纪以来的大地测量结果表明，这个规则形体

是一个南北稍扁的旋转椭球面。

旋转椭球是由一个椭圆绕其短轴旋转而成的几何形体。图 4-8 表示以 O 为中心，以 NS 为旋转轴的椭球。

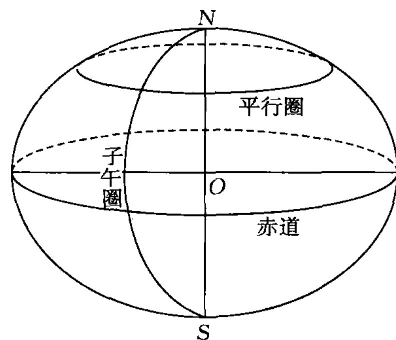


图 4-8 地球椭球

大地测量中，用来代表地球形状和大小的旋转椭球称为地球椭球，简称椭球。地球椭球由表征地球几何特征的椭球长半轴 a、扁率 α，以及表征地球物理特征的椭球总质量 M、椭球绕其短轴旋转的角速度 ω 等 4 个参数表示。

20 世纪 50 年代以前，地球椭球的几何参数 a、α 是利用大陆上局部地区的天文、大地、重力测量资料推算的，精度较低，只能代表地球上局部地区的几何形状。60 年代以来，利用全球的地面大地测量和卫星大地测量资料，推求地球椭球的 4 个几何和物理参数，精度比 50 年代前提高了两个数量级。如 GRS 80（Geodetic Reference System 1980）椭球，a 的误差小于 2 m，α 和 GM（G 为引力常数，M 为地球总质量）的相对中误差分别为 $\pm 3\times10^{-6}$ 和 $\pm 2\times10^{-7}$。表 4-1 是我国采用的椭球参数表。我国 1954 北京坐标系采用克拉索夫斯基椭球，1980 西安坐标系采用 GRS 75 椭球，2000 国家大地坐标系（CGCS 2000）基本采用 GRS 80 椭球（对 GRS 80 椭球的 GM 值作了精化）。在我国应用的 WGS 84 和 ITRF（见第六章）两个国际坐标系采用的椭球参数分别是 WGS 84 椭球和 GRS 80 椭球，具体见表 4-1。

表 4-1 我国应用的地球椭球参数

椭球名称	年代	a /m	α	GM ($\times10^{14}\,m^3s^{-2}$)	ω ($\times10^{-5}\,rad\ s^{-1}$)
克拉索夫斯基	1940	6 378 245	1 : 298.3		
GRS 75	1975	6 378 140	1 : 298.257	3.986 005	7.292 115
WGS 84	1996	6 378 137	1 : 298.257 223 563	3.986 004 418	7.292 115
GRS 80	1980	6 378 137	1 : 298.257 222 101	3.986 005	7.292 115
CGCS 2000	2007	6 378 137	1 : 298.257 222 101	3.986 004 418	7.292 115

在地球椭球面上，包含椭球旋转轴（短轴）的平面称为大地子午面，大地子午面与椭球面的截线称为大地子午圈（大地子午线）。通过椭球中心且垂直于旋转轴的平面称为大地赤道面，赤道面与椭球面的截线称为赤道。平行于赤道的平面与椭球面的截线称为平行圈（平行线），又称纬圈。椭球面上旋转轴的两端点 N、S 分别称为北极和南极。

由于地球形状和质量分布的不规则，地球重力场及其水准面也变得很复杂，为了研究复杂的重力和重力场的方便而引入的地球椭球称为正常椭球。由于地球真实形状的不规则性，要在地面上开展一系列大地测量计算，必须选定一规则曲面作为测量计算的基准面，为此引入的地球椭球称为参考椭球。

二、正常椭球与正常重力

所谓正常椭球，就是满足一定要求的一个假想的形状和质量分布很规则的旋转椭球体（地球椭球），它是大地水准面的规则形状，用以代表地球的理想形体。由正常椭球产生的重力场称为正常重力场，相应的重力、重力位和水准面分别称为正常重力、正常重力位和正常水准面。由于正常椭球是人为选定的，我们使正常椭球面上的正常重力位等于常数，其值与大地水准面

上的重力位 W_0（见图 4-7）一致。

正常重力场是实际地球重力场的近似，为了使两者差别较小，我们按以下要求选择正常椭球：

（1）正常椭球的旋转轴与实际地球的自转轴重合，且两者的旋转角速度相等；

（2）正常椭球的中心重合于地球质心，坐标轴重合于地球的主惯性轴；

（3）正常椭球的总质量与实际地球的质量相等；

（4）正常椭球表面与大地水准面的偏差的平方和为最小。

正常椭球由以下四个基本参数确定：椭球的长半轴 a，扁率 α，椭球的总质量 M 和椭球绕其短轴旋转的角速度 ω。前两个参数确定了椭球的几何形状，后两个参数确定了椭球的物理特征。

由于正常椭球的规则性，正常椭球的引力位显然与 λ 无关，而只是 ρ 和 θ 的函数；且其引力位对称于赤道，取对称于赤道的 θ 和 $180-\theta$ 两点的余弦，符号相反，因而引力位的球谐函数展开式中只有偶阶带谐项。于是，由式(4-19)可得正常椭球对外部点的引力位 V 为

$$V_{(\rho,\theta)} = \frac{fM}{\rho}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)\right] \tag{4-23}$$

由于 J_{2n} 是与正常椭球参数有关的常系数，因此式(4-23)可完全确定。

按照位和力的关系，正常重力可通过对正常重力位求导而得到。略去推导过程，我们得到在正常椭球面上，正常重力值 γ_0 的公式为

$$\gamma_0 = \gamma_a(1 + \beta\sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B) \tag{4-24}$$

式中，γ_a 为赤道处的重力值；B 为计算点的大地纬度；系数 β、β_1 及赤道重力 γ_a 分别为

$$\left.\begin{aligned} \gamma_a &= \frac{fM}{ab}\left(1 - \frac{3}{2}m - \frac{3}{7}m\alpha - \frac{125}{294}m\alpha^2\right) \\ \beta &= -\alpha + \frac{5}{2}m - \frac{17}{14}m\alpha + \frac{15}{4}m^2 \\ \beta_1 &= -\frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{5}{8}m\alpha \end{aligned}\right\}$$

其中，$m = \dfrac{\omega^2 a^2 b}{fM}$；$b$ 为椭球的短半轴。

高出正常椭球面 H 处的正常重力值 γ 为

$$\gamma = \gamma_0 - 0.308\,6H \tag{4-25}$$

即点的高度提高 1 m，则正常重力减小 0.3 mGal。

对应于真正地球和正常椭球的两种重力场，必然有两种重力值，即实际重力值 g 和正常重力值 γ，g 和 γ 的差值，即 $g-\gamma$，称为重力异常。

三、扰动位

引入正常椭球后，对于空间任意点都存在着两个重力位值：真正的地球重力位 W 和正常重力位 U。这两者之间当然是有差别的，这个差值称为扰动位 T，即

$$T = W - U \tag{4-26}$$

或者

$$W = U + T$$

就是说，地球重力位等于正常重力位加上扰动位。

由式(4-13)可得

$$T = V_E - V_H + Q_E - Q_H$$

式中，下标 E 表示该量属于实际地球；下标 H 表示该量属于正常椭球。由于选择正常椭球时已使其旋转轴与实际地球的旋转轴重合，且角速度相等，因此 $Q_E = Q_H$，于是

$$T = V_E - V_H \tag{4-27}$$

就是说，扰动位可以理解为地球的质量分布与正常椭球的质量分布不一致引起的引力位差。我们把这两种质量之差(注意这里指的是每点的质量差而不是总质量差)称为扰动质量。因此，扰动位就是由扰动质量所构成的质体的引力位。我们知道，对于质体引力位可以表示为一个球谐函数的级数式。

由式(4-27)知，扰动位的展开式可以由地球引力位和正常引力位的两个展开式相减得到。地球引力位式(4-19)是在坐标原点位于地球质心，坐标轴与地球的三个主惯性轴重合的条件下得到的，正常引力位式(4-23)则在坐标原点位于椭球中心，一个坐标轴与正常椭球的旋转轴重合时才成立。由于选择正常椭球时，已使其中心重合于地球质心、坐标轴重合于地球的主惯性轴、正常椭球与地球两者的旋转轴重合、正常椭球的总质量与地球总质量相等，于是扰动位 T 为

$$T = -\frac{fM}{\rho}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n\sum_{k=0}^{n}(a'_{nk}\cos k\lambda + b_{nk}\sin k\lambda)P_{nk}(\cos\theta) \tag{4-28}$$

式中，a'_{nk} 为地球引力位展开式的系数与正常引力位相应系数之差。

§4-3　高程系统

一、选择高程系统的要求

我们知道要确定地面点的高程可以通过水准测量、三角高程测量、GPS 测量推求。但无论是哪种方法求出的地面点高程，都有一个基准面(起算面)和基准线(按什么线方向量取高程)的问题。地面点高程的一般定义是：由该点沿基准线至基准面的距离。两地面点的高差是此两点高程之差。不同的高程基准线、面构成了不同的高程系统。显然，同一地面点在不同高程系统中其高程值是不相同的。

对于所选择的高程系统，我们有如下的基本要求：

(1)作为点位位置的表示，我们很自然地要求点的高程应该是单值的。对于水准测量，点位高程不应取决于水准路线。

(2)从实践的角度看，换算到所采用的高程系统时，测量高差所加的改正数应当很小，以便在处理低等水准测量数据时可以忽略这些改正。

(3)从解决几何问题的角度看，由于大地高为测高部分和大地水准面高度两项之和，由此要求所采用的高程系统应使大地水准面与参考椭球面(正常椭球面)间差距的确定方法既足够严密又方便实用。

(4)从解决物理问题的角度看，要求所采用的高程系统能使同一水准面上各点的高程尽可能是相等的。由于水准测量数据实际上是用来确定地球自然表面和真实重力场的水准面间的相互位置这一物理问题的，而这一问题正是工程应用中避免“水往高处流”的现象所必需的。

以上第四个要求与第二个要求实际上是有矛盾的，因此实践中寻求最好的高程系统是按应用的不同要求采取特殊的折中方法。

二、水准测量观测高程的不唯一性

水准测量原理是建立在水准面相互平行的基础上的，在较小范围内将水准测量每一站的前后标尺所在的两个水准面视为平行，从而将测出的水准面之间的距离作为两点的高程之差。事实上，我们知道水准面是互不平行的。当水准路线较长，测区范围较大时，就不能视水准面互相平行。也就是说必须考虑水准面不平行对水准测量所测高程的影响。

如图 4-9 所示，设 OEC 为大地水准面（高程起算面），地面点 B 的观测高程（称为测量高）可以按水准路线 OAB 各测站测得的高差 $\Delta h_1, \Delta h_2, \cdots$，求和得到

$$H_{测}^{B} = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \cdots = \sum_{OAB} \Delta h$$

也可以按另一条水准路线 ONB 各测站测得的高差 $\Delta h'_1, \Delta h'_2, \cdots$，求和得到

$$H'^{B}_{测} = \Delta h'_1 + \Delta h'_2 + \cdots = \sum_{ONB} \Delta h'$$

由于水准面的不平行性，对应的高差 Δh_i 与 $\Delta h'_i$ 并不相等，因而 $H_{测}^{B}$ 与 $H'^{B}_{测}$ 也不相等。

图 4-9 中，$OABNO$ 是个水准闭合环，显然

$$\sum_{OAB} \Delta h \neq \sum_{BNO} \Delta h'$$

$$\sum_{OAB} \Delta h + \sum_{BNO} \Delta h' = w \neq 0 \tag{4-29}$$

所以，即使水准测量完全没有误差，水准环高差闭合差 w 也不会等于 0。这种由水准面不平行引起的水准环线观测高差闭合差，称为理论闭合差。

点的高程应该是单值的，而不应取决于水准路线，因此在处理水准测量成果时，必须顾及地球形状理论的特点，合理的定义高程系统，加入改正数。当然这些改正数应当很小，以便在处理低等水准测量成果时可以忽略这些改正。

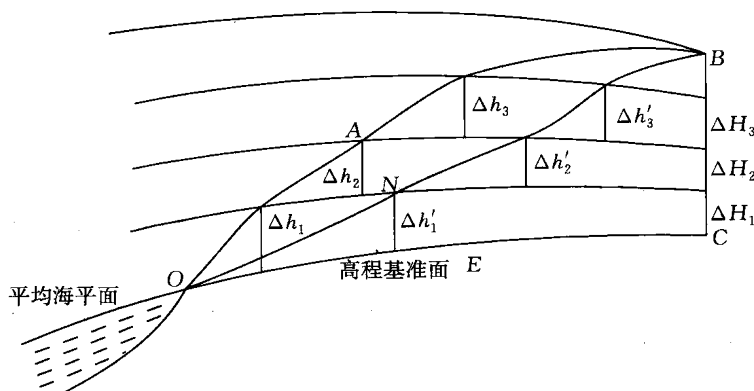


图 4-9 水准面不平行性对水准测量高程的影响

三、正高系统

以大地水准面为基准面，以铅垂线为基准线。地面点沿铅垂线量至大地水准面的距离称为该点的正高。如图 4-9 所示，B 点沿铅垂线 BC 量得的各水准面间的高差用 ΔH 表示，则 B 点的正高 $H_{正}^{B}$ 为

$$H_{正}^{B}=\Delta H_{1}+\Delta H_{2}+\cdots=\sum_{CB}\Delta H=\int_{CB}\mathrm{d}H \tag{4-30}$$

由于水准面为等位面，图 4-9 中两无限接近水准面的位能差为

$$g\mathrm{d}h=g^{B}\mathrm{d}H$$

$$\mathrm{d}H=\frac{g}{g^{B}}\mathrm{d}h \tag{4-31}$$

式中，g 为水准路线上相应于 $\mathrm{d}h$ 处的重力；g^{B} 为沿 B 点铅垂线方向上相应于 $\mathrm{d}H$ 处的重力。将式(4-31)代入式(4-30)，得

$$H_{正}^{B}=\int_{CB}\mathrm{d}H=\int_{OAB}\frac{g}{g^{B}}\mathrm{d}h \tag{4-32}$$

铅垂线方向上的重力 g^{B} 随不同的深度其数值不同，设它们的平均值为 g_{m}^{B}，则

$$H_{正}^{B}=\frac{1}{g_{m}^{B}}\int_{OAB}g\,\mathrm{d}h \tag{4-33}$$

g_{m}^{B} 对某一地面点来说是个固定值，$\int g\mathrm{d}h$ 为过 B 点的水准面与大地水准面之间的位能差，与水准路线的路径无关，因此，正高是唯一确定的。但由于 g_{m}^{B} 是深入地下的重力平均值，我们不能确知陆地下的重力分布，因而 g_{m}^{B} 既无法测定又不能精确算出，故点的正高也不能精确求得，只能算出它的近似值。

四、正常高系统

正高不能精确求得的根本原因在于 B 点的 g_{m}^{B} 无法精确测定。如果将式(4-33)中的 g_{m}^{B} 用正常重力 γ_{m}^{B} 来代替，就得到另一种系统的高程，称为正常高，用 $H_{常}$ 表示，即

$$H_{常}^{B}=\frac{1}{\gamma_{m}^{B}}\int_{OAB}g\,\mathrm{d}h \tag{4-34}$$

式中，g 可沿水准路线由重力测量测得；$\mathrm{d}h$ 由水准测量测得；γ_{m}^{B} 可由正常重力式(4-24)、式(4-25)算出，所以正常高可以精确得到，其数值不随水准测量路线的改变而异，是唯一确定的。我国采用正常高系统作为计算地面点高程的统一系统。

如果计算出地面各点的正常高 $H_{常}$，沿着各自铅垂线(实际上应为正常重力线)方向向下量取 $H_{常}$，得到与地面各点一一相对应的点，把它们连成一个连续的曲面，这个曲面就是正常高系统的基准面，它与大地水准面极为接近，称为似大地水准面。因此，所谓正常高系统是以似大地水准面为基准面的高程系统，地面点的正常高是该点沿铅垂线(实际上应为正常重力线)到似大地水准面的距离。

似大地水准面不是水准面，但接近于水准面，它只是用于计算的辅助面，并没有严格的几何意义和物理意义。

似大地水准面与大地水准面之间的差(即正常高与正高之差)与点的高程和地球内部质量分布有关。在平均海水面上，由于观测高差 $\mathrm{d}h=0$，故 $H_{常}=H_{正}=0$，在海洋面上似大地水准面与大地水准面重合，所以作为高程起算面的高程原点对两者都是适用的。在高山地区，似大地水准面与大地水准面的差最大可达 3.0 m。平原地区，这种差异约几厘米。

实际应用中，直接用式(4-34)计算正常高很不方便，顾及到式中的实测重力值可分为正常重力 γ 和重力异常$(g-\gamma)$两部分，可将水准测量各个测段的观测高差，加上正常水准面不平

行改正和重力异常改正，化算为相应的正常高，略去过程，其结果为

$$H_{常}^{B} = \int_{OAB} \mathrm{d}h + \frac{1}{\gamma_m^B}\int_{OAB}(\gamma_0 - \gamma_0^B)\mathrm{d}h + \frac{1}{\gamma_m^B}\int_{OAB}(g-\gamma)\mathrm{d}h \tag{4-35}$$

上式等号右边各项的意义如下：第一项是水准测量测得的高差；第二项中 γ_0 是沿水准路线 OAB 上各点的正常重力，由于正常位水准面也不平行，是随纬度变化的，$\gamma_0 \neq \gamma_0^B$，所以，该项称为正常位水准面不平行的改正；第三项中$(g-\gamma)$ 是重力异常，该项是由正常位水准面与重力位水准面不一致所引起的。

五、力高系统

水准面是个等位面，其上各点的重力位相等，但它们的正高高程或正常高高程却可能不相等。设 A、B 两点位于同一水准面，则

$$\int_{OA} g\,\mathrm{d}h = \int_{OB} g\,\mathrm{d}h \tag{4-36}$$

因为

$$g_m^A \neq g_m^B$$

$$\gamma_m^A \neq \gamma_m^B$$

故，由式(4-33)和式(4-34)可知

$$H_{正}^{A} \neq H_{正}^{B}$$

$$H_{常}^{A} \neq H_{常}^{B}$$

这将给大型水利建设的设计、施工带来许多不便。此时，需要一种“同一水准面上各点的高程相等”的高程系统。所以，在水利建设中常常采用力高系统，也叫做动力高系统。一个点 B 的力高

$$H_{力}^{B} = \frac{1}{\gamma_{45}^{B}}\int g\mathrm{d}h \tag{4-37}$$

由上式可见，它是以纬度为 45°的正常重力 γ_{45} 换置正常高式(4-34)中的 γ_m 得出的；同一水准面上各点的力高相等。所以力高系统是将同一水准面上各点的力高以其纬度为 45°处的正常高表示的高程系统。

有的部门为了使测区的力高更接近于该地区的正常高，采用“局部力高系统”即

$$H_{力局} = \frac{1}{\gamma_{\varphi m}}\int g\mathrm{d}h \tag{4-38}$$

式中，$\gamma_{\varphi m}$ 为测区平均纬度 φ_m 处的正常重力值。

地面点的力高和它的正常高可以很容易地互相换算。由式(4-34)和式(4-36)可得

$$\gamma_m^B H_{常}^{B} = \gamma_{45}^{B} H_{力}^{B}$$

$$H_{常}^{B} = H_{力}^{B} - \frac{\gamma_m^B - \gamma_{45}^B}{\gamma_m^B} H_{力}^{B} \tag{4-39}$$

六、地球位数系统

地面点的高程似大地水准面的位 W_0 与通过该点水准面的位 W 之差来表示，称为地球位数，即

$$C = W_0 - W = \int_{OAB} g\,\mathrm{d}h \tag{4-40}$$

式中，OAB 为水准路线(见图 4-9)；$\mathrm{d}h$ 为水准测量观测高差；g 为测线上的平均重力值。地球位数也是以大地水准面为基准面，但不是以米制表示的高程，而是位差，单位为千伽米($10^5\,\mathrm{cm}^2\mathrm{s}^{-2}$)。同一水准面上所有各点的地球位数相同，其值由每一测段水准测量求得的高差乘以该测段的平均重力观测值而得。用地球位数表示的水准测量结果，能非常方便地换算为正高、正常高或力高。

正高系统、正常高系统及力高系统各有优缺点，但它们同时并存不仅使高程系统不能统一，也增加了总体水准测量结果联合处理的困难。不难看出，这三种高程都有一个共同部分：$\int g\mathrm{d}h$，它是高程点所在位置对大地水准面具有的位能，称其为地球位数。它与三种高程的关系简单明确，用它来处理水准测量的观测结果可以达到高程统一的效果。

地球位数虽然没有长度量纲，但可以认为它是测量高程的自然量度。

七、大地高系统

大地高是以参考椭球面(见 § 5-2，现代大地测量中参考椭球与正常椭球是一致的，故此可把参考椭球面理解为正常椭球面)为基准面，以椭球的法线为基准线的高程系统。地面点沿法线至参考椭球面的距离称为该点的大地高。

如图 4-10 所示，P 点为地面点，它沿椭球面的法线为基准线投影到椭球面上点 P_0，则距离$\overline{PP_0}$ 为大地高 H。

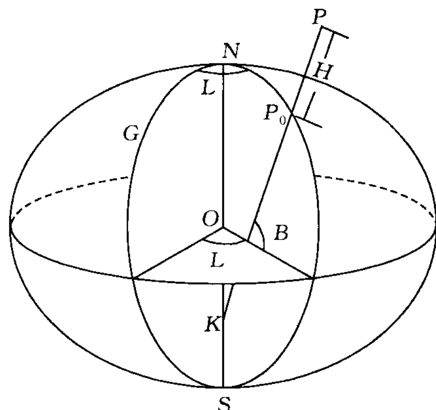


图 4-10　大地高系统

大地高可通过卫星定位测量获得。三角高程测量可获得地面两点的大地高高差，若已知其中一点的大地高，则可求出另一点的大地高。水准测量所得的正高或正常高加上改正项可化算成大地高。

§ 4-4　不同高程系统间的关系及转换

一、正高、正常高与大地高之间的关系

根据以上讨论，同一个地面点对应有 5 个不同的高程值，它们的差异取决于不同的高程基准面。也就是说，高程是相对某一基准面的，它的精度一方面取决于观测量的精度，另一方面也取决于所采用基准面的精度。下面主要分析不同高程基准面间的关系。

地面点投影到椭球面上的方法有两种：即赫尔默特投影和毕兹特投影，如图 4-11 所示。

赫尔默特投影是将地面点 P 沿法线直接投影到椭球面上($P_0P = H$)，而毕兹特投影是将地面点 P 先沿铅垂线投影到大地水准面上($P'P = H_{正}$)，再沿法线投影到椭球面上($P_0'P' = N$)。

我们知道，大地水准面和参考椭球面通常既不重合，也不平行，铅垂线和法线间存在一夹角 μ，称为垂线偏差。于是，按这两种投影方法是有差异的。不过，这种差异很微小。如设

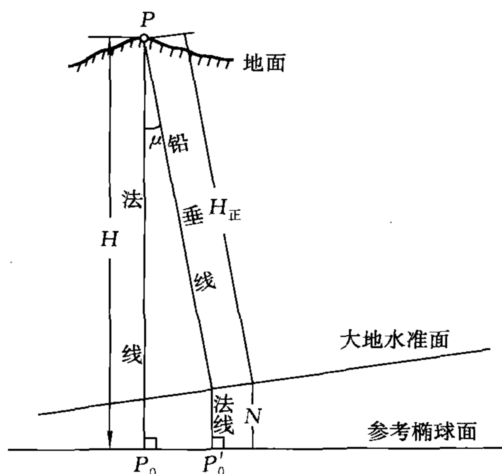


图 4-11 赫尔默特投影和毕兹特投影

$\mu=60''$，$H=1\ 000\ \mathrm{m}$，则 H 和 $H_正+N$ 之差仅有 0.1 mm。$P_0P'_0$ 间的距离仅有 30 cm，对大地经纬度的影响仅为 0.01″，远小于天文测量误差 0.3″。因此，实用上完全可以忽略这两种投影的差异。

GPS 测量可直接获得地面点的大地高，地面点与其椭球面上投影点的关系与赫尔默特投影方法一致。但在经典大地测量中，大地高不是直接测得的，而是通过正高（或正常高）加改正算得，因此地面点与椭球面上点的对应关系采用毕兹特投影在理论上是严密的。但由于毕兹特投影与赫尔默特投影的差异在实用上可忽略，而赫尔默特投影避免了先投影到大地水准面上，再投影到椭球面上两次投影的麻烦，在实用上更为方便，所以经典大地测量计算中采用了赫尔默特投影。

于是，由图 4-11，大地高可按下式计算

$$H=H_正+N \tag{4-41}$$

式中，$H_正$ 是正高，N 是大地水准面至参考椭球面的距离，称为大地水准面差距。

我国采用正常高系统，大地高按下式计算

$$H=H_常+\zeta \tag{4-42}$$

式中，$H_常$ 是正常高；ζ 是似大地水准面至参考椭球面的距离，称为高程异常。

图 4-12 表示了参考椭球面、大地水准面和似大地水准面及与它们对应的大地高、正高、正常高的示意关系。

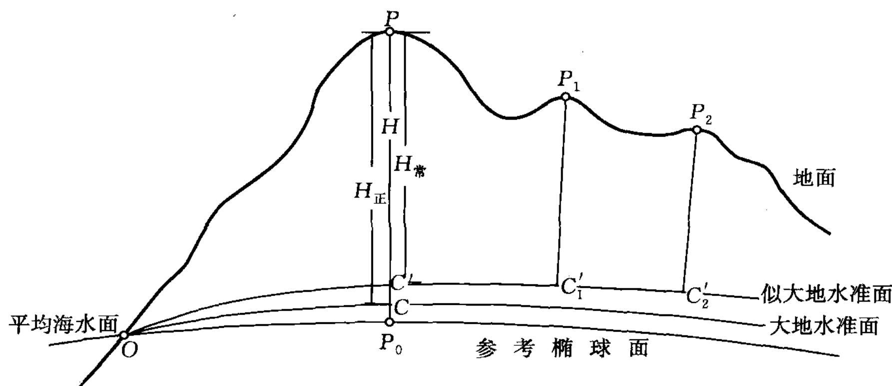


图 4-12 参考椭球面、大地水准面及似大地水准面

二、高程异常的求定

前已指出，地面点的大地高可由正常高和高程异常两部分组成。如果已知一点的大地高和正常高，则由两者之差就可求得该点的高程异常值，即

$$\zeta=H-H_常 \tag{4-43}$$

应用 GPS 测量可以精确地测定地面点的大地经纬度 (L,B) 和大地高 H，如在该 GPS 点

上又实施了水准测量(该点称为 GPS 水准点),则可求得该点的正常高 $H_{常}$,由式(4-43)即可求得该点的高程异常值。

在区域内建立若干 GPS 水准点,就可以获得该区域内若干离散的 ζ 值,由此通过数学方法可拟合该区域的似大地水准面(即推求未知点的高程异常),这一推求高程异常的方法称为 GPS 水准法。GPS 水准法所采用的数学方法较丰富,如多项式拟合法、多面函数拟合法、移动曲面法、加权平均法、拟合推估法等,下面以多项式拟合法为例说明其基本原理。

如以二次多项式作为高程异常的拟合模型,则该区域的高程异常 ζ 可表示为

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta L + \alpha_2 \Delta B + \alpha_3 \Delta L^2 + \alpha_4 \Delta L \Delta B + \alpha_5 \Delta B^2 \tag{4-44}$$

式中,$\Delta L = L - L_0$,$\Delta B = B - B_0$ 是所求点的大地经纬度(L,B)与区域内某已知点的大地经纬度(L_0,B_0)之差;$\alpha_i(i=0,1,\cdots,5)$是待定系数。设该区域内有 n 个 GPS 水准点,即 $\zeta_i(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 6)$已知,则由式 4-44 可组成 n 个方程,令

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta L_1 & \Delta B_1 & \Delta L_1^2 & \Delta L_1 \Delta B_1 & \Delta B_1^2 \\ 1 & \Delta L_2 & \Delta B_2 & \Delta L_2^2 & \Delta L_2 \Delta B_2 & \Delta B_2^2 \\ 1 & \Delta L_3 & \Delta B_3 & \Delta L_3^2 & \Delta L_3 \Delta B_3 & \Delta B_3^2 \\ 1 & \Delta L_4 & \Delta B_4 & \Delta L_4^2 & \Delta L_4 \Delta B_4 & \Delta B_4^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta L_n & \Delta B_n & \Delta L_n^2 & \Delta L_n \Delta B_n & \Delta B_n^2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} \tag{4-45}$$

则待定系数向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最小二乘解为

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{\zeta} \tag{4-46}$$

式中,$\boldsymbol{P}$ 为权矩阵,若将已知数据视为互相独立,则 $\boldsymbol{P}$ 的主对角线元素为 $\zeta_i(i=1,2,\cdots,n)$的权。

待定系数 $\alpha_i(i=0,1,\cdots,5)$确定后,未知点的 ζ 就可根据该点的 L,B 由式(4-44)算得。

同样上述方法也适应于求定大地水准面差距 N,只需将式(4-43)中的 $H_{常}$ 用 GPS 水准点的正高 $H_{正}$ 代替,并将 ζ 换为 N 即可。

目前,利用 GPS 水准方法推求高程异常值的精度可以达到厘米级甚至更高的精度。

由上可知,在陆地上,用 GPS 水准可以直接求定大地水准面。在海洋上,由第二章可知,可由卫星测高直接测出大地水准面。经典大地测量时期,只有通过重力场获得大地水准面,而现在则可直接测量大地水准面形状。

通过地球重力场模型求定大地水准面差距 N(或高程异常 ζ),称为地球重力场模型法。直观地理解,大地水准面的位置与地球重力位有关,椭球面的位置与正常重力位有关,故 N(或 ζ)可由扰动位 T 确定。不加推导,直接给出如下公式

$$N = \frac{T_0}{\gamma_0} \tag{4-47}$$

式中,T_0 是大地水准面上的扰动位;γ_0 是正常椭球面上的正常重力值。类似地有

$$\zeta = \frac{T_p}{\gamma_m} \tag{4-48}$$

式中,T_p 是地面的扰动位;γ_m 是线段 P_0P(见图 4-12)上正常重力的积分中数。

三、高程异常格网模型

高程异常(或大地水准面差距,下同)格网模型是一定范围内高程异常的离散化数字表达,

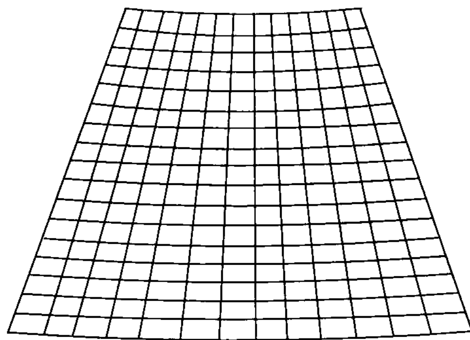


图 4-13 经纬线格网

是该范围内所有等间距格网点高程异常计算值的集合，在数据库中以格网数据结构的形式存储。格网数据结构是把建库的地理范围按经纬线划分成规则的梯形格网（见图 4-13），以格网范围或格网的纵横交点作为结点，存储对应于该交点的高程异常值或格网范围的平均值。

例如，按 1′×1′的实地范围把一幅 1∶100 万图幅沿经线和纬线方向划分为 240×360 个梯形格网，每个格网可以按行和列以自左向右、自上向下的顺序编号（与国际分幅的方法类似），则可编成 00001～86400 号。

格网模型可采用多级格网结构，不同级格网间距不同，格网越小，所表达的连续高程异常值的精度越高。例如，将建库地区根据已知数据的分布分为多个区域，不同区域采用不同间距的格网。

建立某区域的高程异常格网模型就是把该区域按经纬线划分成等间距的规则格网单元，根据区域内已知的高程异常值（如若干 GPS 水准点），采用一定的数学模型（如以上示例所采用的二次多项式模型）求取出各个格网节点的高程异常。

应用该高程异常格网模型时，先确定所求点所在的格网单元，根据 4 个格网节点的高程异常采取双线性内插即可求得该点的高程异常。

在地形测图、工程建设等应用中需要正常高。传统的水准测量具有劳动强度大、工作效率低的缺陷，而 GPS 测量得到的是大地高。采用 GPS 测量取代水准测量，需要已知高程异常格网模型，只有建立了高程异常格网模型后，才能将大地高转化成正常高。目前，在航测像片高程联测、工程竣工测绘的地面标高、地下管线测量中的管线标高等测量方面，GPS 测量已逐步代替了水准测量。因此，高程异常格网模型的建立和精化具有明显的经济效益。

第五章　参考椭球面与大地坐标系

由于地球形状近似为一规则椭球体，因此可将椭球面作为大地体的数学化形状，建立地面与椭球面上点的一一对应关系，从而开展以椭球面为基准面的一系列大地测量研究。本章在讨论了参考椭球的概念及有关椭球的数学性质的基础上，研究了地面边角观测元素归算至参考椭球面的方法，建立了大地坐标系与大地极坐标系、大地空间直角坐标系的相互转换模型。

§5-1　球面三角学的基本知识

一、球面三角形

球面上三个大圆弧（大圆弧是过球心的平面与球面的交线）所构成的闭合图形叫做球面三角形。如图 5-1 所示，这三个大圆弧叫做球面三角形的边，用小写字母 a、b、c 表示，各大圆弧组成的球面角，叫做球面三角形的角，用大写字母 A、B、C 表示。

将球面三角形 ABC 的各顶点与球心 O 连接，则构成球心三面形 O—ABC（见图 5-1），由于圆的圆心角与所对的弧同度，则有

$$a=\angle BOC,\ b=\angle AOC,\ c=\angle AOB$$

又知

$$A=\angle TAT',B=\angle EBE',C=\angle FCF'$$

故球面三角形的边与所对应的球心三面角的面角同度，球面三角形的角与球心三面角的二面角同度。

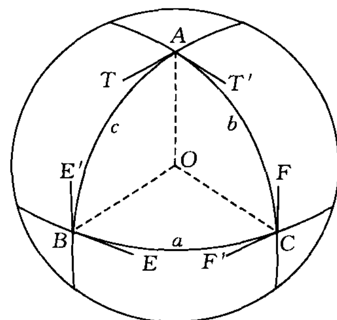


图 5-1　球面三角形

二、球面角超

球面三角形三内角之和与平面三角形三内角之和的差叫做球面角超 ε，即

$$\varepsilon=A+B+C-180^\circ \tag{5-1}$$

ε 的计算公式为

$$\varepsilon=\frac{S}{R^2} \tag{5-2}$$

式中，S 为球面三角形的面积；R 为球的半径。

三、球面三角公式

依据球面三角形的已知元素（边、角）解算其他未知元素的公式就是球面三角公式。

（一）正弦公式

如图 5-2 所示的球面三角形 ABC 中，有

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \tag{5-3}$$

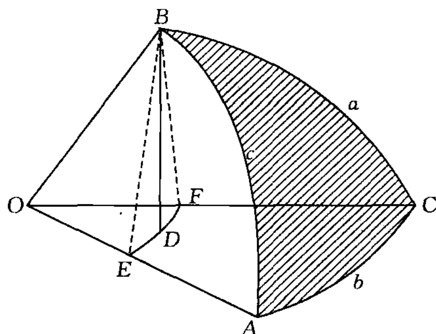


图 5-2 正弦公式的推导

即球面三角形各边的正弦与其对角的正弦成比例。推证如下：

图 5-2 为球心三面角 $O-ABC$，过 B 点作平面 OAC 的垂线交此平面于 D，再从 D 向 OA、OC 引垂线 DE、DF；过 BE、BF。于是得到 4 个平面直角三角形 OBE、OBF、BDE、BDF，而且 $\angle BOC=a$，$\angle AOC=b$，$\angle AOB=C$，$\angle BED=A$，$\angle BFD=C$。因为

$$\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\frac{BE}{OB}}{\frac{BD}{BF}}=\frac{BE\cdot BF}{OB\cdot BD}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\frac{BF}{OB}}{\frac{BD}{BE}}=\frac{BE\cdot BF}{OB\cdot BD}$$

故

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

同理可证

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}$$

合并起来，正弦公式得证。

（二）其他常用公式

下面我们不加推证，直接给出其他常用公式。

边的余弦公式

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \tag{5-4}$$

角的余弦公式

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a \tag{5-5}$$

正余弦公式

$$\left.\begin{aligned}\sin a\cos B&=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A\\ \sin a\cos C&=\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A\\ \sin A\cos b&=\sin C\cos B+\cos C\sin B\cos a\\ \sin A\cos c&=\sin B\cos C+\cos B\sin C\cos a\end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

余切公式

$$\left.\begin{aligned}\cot a\sin c&=\cos c\cos B+\sin B\cot A\\ \cot a\sin b&=\cos b\cos C+\sin C\cot A\\ \cot A\sin C&=-\cos C\cos b+\sin b\cot a\\ \cot A\sin B&=-\cos B\cos c+\sin c\cot a\end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

正切公式

$$\frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)} \tag{5-8}$$

(三)解算直角球面三角形的纳白尔规则

设球面三角形 ABC 中有一角为 90°,则该角的余弦为 0,正弦为 1,代入以上各公式,可得直角球面三角形边角关系的公式。为了便于记忆,纳白尔总结了记忆方法:

将除直角(设为 C)以外的 5 个元素标示成一环形,方法是:与直角 C 相邻的两元素照写,与直角 C 相对的三元素分别以 90°减之(见图 5-3)。则环形上任一元素的正弦等于:

(1)相邻两元素正切的积;

(2)相对两元素余弦的积。

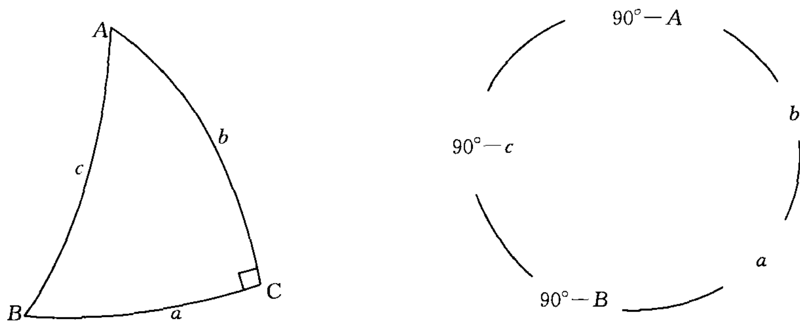


图 5-3　直角球面三角形的纳白尔规则

例如,取元素 $90°-c$,它的两个相邻元素为 $90°-A$ 和 $90°-B$,它的两个相对元素为 a 和 b,于是

$$\sin(90°-c)=\tan(90°-A)\tan(90°-B)$$

$$\sin(90°-c)=\cos a\cos b$$

即

$$\cos c=\cot A\cdot\cot B$$

$$\cos c=\cos a\cdot\cos b$$

§5-2　参考椭球

一、大地测量的计算基准面

由于地球真实形状的不规则性,要在地面上开展一系列大地测量计算,必须选定一规则曲面作为测量计算的基准面。例如,常规地面测量通过野外观测只能获得地面点间的方向、距离和天文方位角,为了求得水平控制网点的坐标,要进行一系列的计算,这就需要选定计算的基准面。

适于大地测量计算的基准面应当满足以下 3 个要求:

(1)应是接近地球自然形体的曲面,这样可使地面观测量归算的改正数很微小;

(2)这个曲面应是一个便于计算的数学曲面,从而能保证由观测量计算坐标的可行性;

(3)这个曲面与大地体的位置要固定下来,即能建立起地面点与基准面上点的一一对应。

我们已知,大地水准面接近南北稍扁的旋转椭球面。事实上,根据近年来的精密测定结果,大地水准面同适当确定的椭球面相比较,北极处约凸出 10 m,南极处约凹进 30 m(见图 5-4)。人们据此夸张地说地球是“梨形”的。其实这点差异同地球赤道半径与极半径之差

21.4 km相比是微不足道的。

大地水准面在赤道面上的截线不是正圆，而更接近于椭圆，长轴指向西经 15°方向，长短半径之差为 69.5 m，赤道扁率为 1∶91 827，约为极扁率的 1/300（见图 5-5）。

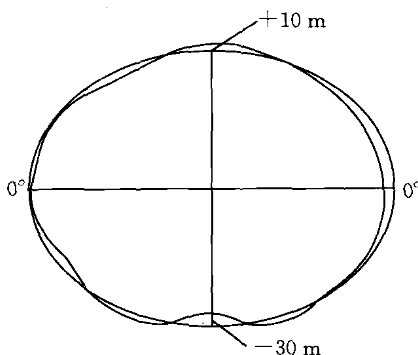


图 5-4 大地水准面在子午面上的截线（$L=90°$）

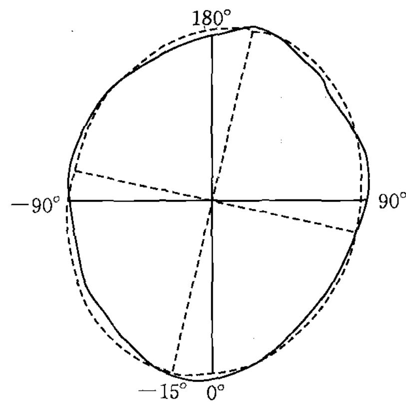


图 5-5 大地水准面在赤道面上的截线

因此"梨形"球体、三轴椭球是更接近于地球形状的数学曲面，但是，在它上面进行大地测量计算将会麻烦更多而收益甚微。而在旋转椭球面上计算，既不影响计算精度，又使计算工作较为简便，所以，我们选用旋转椭球面作为测量计算的基准面。

选定一组椭球参数，即选定了某一地球椭球后，必须确定它同大地体的相关位置，即完成椭球的定位，这样才能建立地面和椭球面的对应关系，从而把地面大地控制网归算到椭球面上。

具有确定的参数和定位的地球椭球称为参考椭球。大地控制网中的地面观测元素需要归算到参考椭球面上，并在这个面上进行计算，所以参考椭球面是测量计算的基准面；地面点通过椭球法线建立与椭球面上的投影点间的一一对应关系，所以椭球法线是测量计算的基准线。

参考椭球确定了大地坐标系（见 § 5-3），如果两个国家或一个国家不同时期采用了不同的参考椭球，则也就是采用了不同的大地坐标系，此时如需要相互利用成果，必须进行坐标系的转换。

参考椭球面是真实地球的数学化形状，作为测量计算的基准面，在测绘工作中具有以下重要作用：

（1）参考椭球面是地面点水平坐标（大地经纬度）的参考面，地面点高程位置（大地高）的基准面。

（2）参考椭球面还是描述大地水准面形状的参考面。大地水准面与参考椭球面的垂直距离称为大地水准面差距，铅垂线偏离参考椭球面法线的角度称为垂线偏差。各点的大地水准面差距和垂线偏差反映了两个面间的距离和倾斜情况，是对大地水准面形状的描述。

（3）参考椭球面又是地图投影的参考面。在地图投影中，讨论两个数学曲面之间的对应关系时，也是用参考椭球面来代表地球的。

为研究全球性大地测量问题，需要一个与整个大地体最为密合的参考椭球，称为总地球椭球。总地球椭球的中心一定与地心重合。如果要从几何和物理两个方面来研究全球性大地测量问题，则可以把总地球椭球定义为最密合于大地体的正常椭球。

正常椭球是物理大地测量学中研究有关地球重力场问题的参考面，而参考椭球面则是

几何大地测量学中研究有关大地测量计算问题的参考面。事实上，由于正常椭球具有与参考椭球相同的数学性质，因此正常椭球既可作为大地测量的物理参考面，又可作为几何参考面。

现代大地测量实现了参考椭球的地心定位，已使参考椭球与正常椭球一致。而经典大地测量技术建立的参考椭球，其定位只能最接近于本国或本地区的大地水准面，是非地心定位，因而在那时参考椭球与正常椭球是两个不同的概念。

二、参考椭球的几何参数及其相互关系

地球椭球中常用的几何参数有以下 6 个

$$\left.\begin{aligned} &\text{长半径}\quad a \\ &\text{短半径}\quad b \\ &\text{极曲率半径}\quad c=\frac{a^2}{b} \\ &\text{扁率}\quad \alpha=\frac{a-b}{a} \\ &\text{第一偏心率}\quad e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \\ &\text{第二偏心率}\quad e'=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \end{aligned}\right\} \tag{5-9}$$

以上 6 个参数中只要给定一个长度参数和其他任意一个参数就可确定椭球的形状和大小。大地测量中常用 a 和 α 表示地球椭球的几何形状。

我国 1954 北京坐标系采用克拉索夫斯基椭球，它的参数如下

$$a=6\ 387\ 245.000\ 0\ \text{m}$$
$$b=6\ 356\ 863.018\ 8\ \text{m}$$
$$c=6\ 399\ 698.901\ 8\ \text{m}$$
$$\alpha=1:298.3=0.003\ 352\ 329\ 869\ 26$$
$$e^2=0.006\ 693\ 421\ 622\ 97$$
$$e'^2=0.006\ 738\ 525\ 414\ 68$$

我国 1980 西安坐标系采用国际大地测量和地球物理联合会(IUGG)1975 年推荐的 GRS 75椭球，也可简称 IUGG 1975 椭球，它的几何参数如下

$$a=6\ 378\ 140.000\ 0\ \text{m}$$
$$b=6\ 356\ 755.288\ 2\ \text{m}$$
$$c=6\ 399\ 596.652\ 0\ \text{m}$$
$$\alpha=1:298.257=0.003\ 352\ 813\ 177\ 90$$
$$e^2=0.006\ 694\ 384\ 999\ 59$$
$$e'^2=0.006\ 739\ 501\ 819\ 47$$

我国 2000 国家大地坐标系的 CGCS 2000 椭球基本采用 IUGG 1980 年推荐的 GRS 80 椭球，也可简称 IUGG 1980 椭球，它的几何参数如下

$$a = 6\ 378\ 137.000\ 0\ \text{m}$$
$$b = 6\ 356\ 752.314\ 1\ \text{m}$$
$$c = 6\ 399\ 593.625\ 9\ \text{m}$$
$$\alpha = 1:298.257\ 222\ 101$$
$$e^2 = 0.006\ 694\ 380\ 022\ 90$$
$$e'^2 = 0.006\ 739\ 496\ 775\ 47$$

在近似估算时，常用下列概略值

$$a \approx b \approx c \approx 6\ 400\ \text{km}$$
$$\alpha \approx 1:300$$
$$e^2 \approx e'^2 \approx 0.007 \approx 1:150$$

a、b、c、α、e、e' 是地球椭球常用的 6 个几何参数。为了简化书写和便于运算，引入下列辅助函数

$$\left.\begin{aligned} W &= \sqrt{1-e^2\sin^2 B} \\ V &= \sqrt{1+e'^2\cos^2 B} \end{aligned}\right\} \tag{5-10}$$

式中，B 为大地纬度；W 叫第一辅助函数；V 叫第二辅助函数。它们都属于椭圆函数。

从各参数的定义出发，很容易导出各参数间的关系式。

(一) a 与 b 的关系

由式(5-9)可得

$$\frac{b^2}{a^2} = 1-e^2, \quad \frac{a^2}{b^2} = 1+e'^2 \tag{5-11}$$

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \quad a = b\sqrt{1+e'^2} \tag{5-12}$$

(二) e 与 e' 的关系

由式(5-11)可得

$$(1-e^2)(1+e'^2) = 1$$

于是有

$$1-e^2 = \frac{1}{1+e'^2}, \quad 1+e'^2 = \frac{1}{1-e^2}$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2}, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}$$

$$e = e'\sqrt{1-e^2}, \quad e' = e\sqrt{1+e'^2} \tag{5-13}$$

(三) a 与 c 的关系

由式(5-9)、式(5-11)得

$$a = c\sqrt{1-e^2}, \quad c = a\sqrt{1+e'^2} \tag{5-14}$$

(四) a 与 e 的关系

由式(5-9)、式(5-11)可得

$$\alpha = 1-\sqrt{1-e^2}, \quad e^2 = 2\alpha-\alpha^2 \tag{5-15}$$

(五) W 与 V 的关系

由式(5-10)可得

$$W^2 = 1 - e^2\sin^2 B = 1 - \frac{e'^2}{1+e'^2}(1-\cos^2 B) = \frac{1+e'^2\cos^2 B}{1+e'^2} = \frac{V^2}{1+e'^2}$$

于是有

$$W = V\sqrt{1-e^2} \quad V = W\sqrt{1+e'^2} \tag{5-16}$$

比较以上各对参数中两个参数值的大小，可归纳出以下记忆规则

$$小值 = 大值 \times \sqrt{1-e^2}, \quad 大值 = 小值 \times \sqrt{1+e'^2}$$

以上给出的参数、符号和基本关系式，在以后公式的推导中经常会用到。

§5-3　大地坐标系与大地空间直角坐标系的关系

一、大地坐标系与大地空间直角坐标系的定义

大地坐标系是以大地经度 L、大地纬度 B 和大地高 H 表示空间一点几何位置的坐标系。

如图 5-6 所示，P_0 点的大地子午面 NP_0S 与起始大地子午面 NGS（过格林尼治平均天文台的子午面）所构成的二面角叫做 P_0 点的大地经度，以 L 表示（德文 Länge 的首字母）。P_0 是地面点 P 沿法线到椭球面的投影点，P 点的大地经度就是其投影点 P_0 的大地经度。大地经度由起始大地子午面起算，向东量度，由 0°至 360°；亦可向东向西量度，各由 0°到 180°，分别称为东经和西经，东经为正，西经为负。显然，同一子午线上各点的大地经度相同。

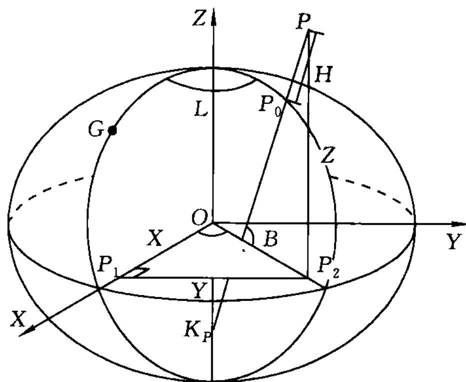


图 5-6　大地坐标系与大地空间直角坐标系

P_0 点的法线 P_0K_p 与赤道面的夹角叫做 P_0 点的大地纬度，以 B 表示（德文 Breite 的首字母）。P 点的大地纬度就是其投影点 P_0 的大地纬度。大地纬度由赤道面起算，向南、北两极量度，各由 0°到 90°，分别称为南纬和北纬，北纬为正，南纬为负。显然，同一平行圈上各点的大地纬度相同。

地面点 P 沿法线到参考椭球面的距离称为该点的大地高（如图中 PP_0 的长度 H），以字母 H 表示。大地高从椭球面起算，向外为正，向内为负。

大地经度 L、大地纬度 B 和大地高 H 构成了三维大地坐标系，这三个坐标值可以唯一地确定地面一点的位置。如果点在椭球面上，显然有 $H=0$，所以由大地经度 L 和大地纬度 B，即可唯一地确定椭球面上一点的位置，这是二维大地坐标系。

椭球面上曲线的方向用大地方位角表示。大地方位角是过曲线上一点的子午线与该曲线的夹角，用字母 A 表示，从子午线北方向起，顺时针方向量取，由 0°至 360°。

大地空间直角坐标系是与大地坐标系相应的一种空间直角坐标系。如图 5-6 所示，以椭球中心 O 为坐标原点，以起始大地子午面与赤道面交线为 X 轴，在赤道面上与 X 轴正交的方向为 Y 轴，椭球的旋转轴为 Z 轴，构成右手坐标系 $O-XYZ$。P 点的位置用 X、Y、Z 表示。

大地坐标系与天文坐标系（见§2-1）虽然在定义上很类似，但它们是两个不同的概念：

(1)基准面线不同,大地坐标系是以参考椭球面及其法线为基准面线的,而天文坐标系是以大地水准面和垂线为基准面线的;

(2)大地坐标是人为定义的数学坐标,而天文坐标则具有物理意义,它受到了垂线的不规则影响;

(3) λ、φ是直接由经纬仪测定的,而L、B是由已知点依据方向、距离、坐标差等观测量计算得到的。

二、法线长的关系式

如图 5-7 所示,在子午面内建立平面直角坐标系,过 P 点作法线 PK_P,它与 X 轴的夹角就是 B,过 P 点作子午圈的切线 TP,它与 X 轴的夹角为 $90°+B$。由于曲线在 P 点之切线的斜率等于曲线在该点的一阶导数,则

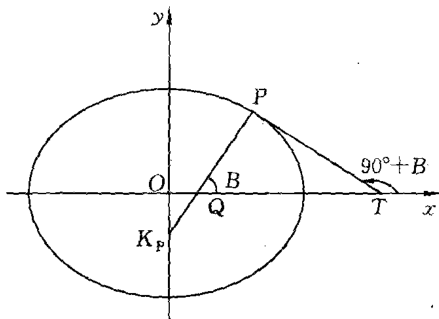


图 5-7　x、y 与 B 的关系

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(90° + B) = -\cot B \tag{5-17}$$

这样就找出了 x、y 与 B 的联系,因此只要对子午圈方程求导,并将上式代入,即可求得两个坐标系间的关系式。

由椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

对 x 求导数得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

顾及式(5-17)和 $b = a\sqrt{1-e^2}$ 得

$$y = x(1-e^2)\tan B$$

上式代入椭圆方程,得椭圆的以 B 为参数的参数方程

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\cos B = \frac{a}{W}\cos B \\ y &= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\sin B = \frac{a(1-e^2)}{W}\sin B \end{aligned}\right\}$$

式中,$W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B}$。

设 $PK_P = N$,由图 5-7 直接有

$$\left.\begin{aligned} x &= PK_P\cos B = N\cos B \\ y &= PQ\sin B \end{aligned}\right\}$$

比较以上两式,得

$$\left.\begin{aligned} PK_P &= N = \frac{a}{W} \\ PQ &= N(1-e^2) \\ QK_P &= PK_P - PQ = Ne^2 \end{aligned}\right\} \tag{5-18}$$

三、大地坐标与大地空间直角坐标的互换

如图 5-8 所示，在直角三角形 PK_PP_3 中，$K_PP_3=(N+H)\cos B$。而 $OP_2=K_PP_3$。于是，在直角三角形 OP_1P_2 中

$$X = OP_2\cos L = (N+H)\cos B\cos L$$
$$Y = OP_2\sin L = (N+H)\cos B\sin L$$

在直角三角形 PQP_2 中

$$PQ = N(1-e^2)+H$$

故

$$Z = PP_2 = PQ\sin B = [N(1-e^2)+H]\sin B$$

因而由大地坐标计算大地空间直角坐标的公式为

$$\left.\begin{aligned} X &= (N+H)\cos B\cos L \\ Y &= (N+H)\cos B\sin L \\ Z &= [N(1-e^2)+H]\sin B \end{aligned}\right\} \tag{5-19}$$

下面讨论由 X、Y、Z 求 L、B、H 的公式。

将式(5-19)中前两式相除得

$$\tan L = \frac{Y}{X}$$

则

$$L = \tan^{-1}\frac{Y}{X} \tag{5-20}$$

将图 5-8 中 P 点所在的子午面取出，表示为图 5-9。显然，图 5-9 中 $OK_P=Ne^2\sin B$，则在直角三角形 PK_PP_3 中

$$\tan B = \frac{Z+N\cdot e^2\sin B}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

图 5-8　(L,B,H) 与 (X,Y,Z) 的关系

图 5-9　P 点所在的子午面

将 $N=\frac{a}{W}$ 代入，并且分子分母同除 $\cos B$，则

$$\tan B = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(Z+\frac{ae^2\tan B}{\sqrt{1+\tan^2 B-e^2\tan^2 B}}\right) \tag{5-21}$$

式(5-21)右端虽然仍有待求的 B 值，但它与左端一样是以 $\tan B$ 的形式出现的，故便于迭代计算。迭代初值 $\tan B_0$ 取

$$\tan B_0 = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

当两次计算的 B 的绝对值之差小于 0.000 1″，即两次 $\tan B$ 的绝对值之差小于 5×10^{-10}，则停止迭代。

如图 5-9 所示，在直角三角形 PK_pP_3 中，

$$\cos B = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{N + H}$$

则

$$H = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N \tag{5-22}$$

式(5-20)、式(5-21)、式(5-22)即为由 X、Y、Z 求 L、B、H 的关系式。

L、B、H 与 X、Y、Z 互换的计算实例见表 5-1。

表 5-1 大地坐标与空间直角坐标互相转换算例

L、B、$H \longrightarrow X$、Y、Z		
已知数据	椭球参数	运算结果
L =77°11′22.333″ B =33°44′55.666″ H =5 555.66 m	克拉索夫斯基椭球	X =1 178 143.531 589 m
		Y =5 181 238.389 636 m
		Z =3 526 461.538 191 m
	IUGG 1975 椭球	X =1 178 124.328 965 m
		Y =5 181 153.940 356 m
		Z =3 526 400.643 389 m
	CGCS 2000 椭球	X =1 178 123.774 402 m
		Y =5 181 151.501 501 m
		Z =3 526 399.001 116 m
X、Y、$Z \longrightarrow L$、B、H		
已知数据	椭球参数	运算结果
X =1 177 888.777 m Y =5 166 777.888 m Z =3 544 555.666 m	克拉索夫斯基椭球	L =77°09′27.204 862″
		B =33°57′18.748 384″
		H =3 878.534 084 m
	IUGG 1975 椭球	L =77°09′27.204 862″
		B =33°57′18.830 340″
		H =3 984.383 865 m
	CGCS 2000 椭球	L =77°09′27.204 862″
		B =33°57′18.829 560″
		H =3 987.375 774 m

§5-4 法截线与大地线

一、任意方向法截线曲率半径

包含椭球面某点法线的平面叫法截面(如图 5-10 所示)。法截面与椭球面的截线叫法截线，如子午圈等。不包含法线的平面与椭球面的截线叫斜截线，如平行圈等。

法截线在大地测量计算中具有重要的作用。我们知道，在地面上水平方向观测是以铅垂线为准的，如果视铅垂线和法线一致，或者经过改正使它们一致，那么，照准面与椭球面的截线就是法截线。要在椭球面上进行测量计算，就必须了解法截线的性质，曲率半径便是一个重要内容。过椭球面一点有无穷多条法截线，一般地说，随着它们的方向不同，曲率半径也不同。我们先推导任意方向法截线的曲率半径公式，再推导特殊方向法截线的曲率半径公式。

(一)基本思路

法截线是椭球面和法截面的截线，将椭球面方程和法截面方程联立求解，就得到法截线方程，它是一条平面曲线，根据平面曲线曲率半径公式，就可求得它的曲率半径。

在图 5-10 中，建立以椭球中心为原点的空间直角坐标系 $O-XYZ$，在这个坐标系中，椭球面的方程为

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}=1 \tag{5-23}$$

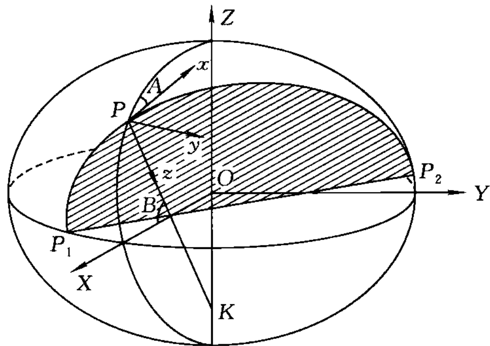


图 5-10　任意方向法截线及坐标系

设 P 为椭球面上一点。注意到旋转椭球面上，过 P 点平行圈上的任意一点，同方向法截线的形状都是一样的，为推导公式简便，设 P 点位于起始子午面上，PK 为过 P 点的法线，P_1PP_2 为过 P 点的任意方向法截线，其大地方位角为 A。现要求 P_1PP_2 的方程式。

由于 P_1PP_2 的法截面与 $O—XYZ$ 坐标系的坐标面是相交的，可想而知，它的方程一定是比较复杂的。这就给求解法截线方程带来不便。为使法截面的方程简单，设法建立一个新的坐标系，令某一坐标面与该法截面重合；同时，为了便于求得曲率半径，设新坐标系的原点与 P 点重合，并设一个坐标轴与 P 点法线重合。这个新坐标系设为 $P—xyz$，如图 5-10 所示。显然在新坐标系中，所求法截面的方程是 $y=0$。为了将它和椭球面方程联立求解，还必须求出椭球面在新坐标系中的方程，这样就可以容易地求得法截线方程，进而求得它的曲率半径。

归纳起来，公式推导分为以下 3 个步骤：

(1)求 $P—xyz$ 中的椭球面方程；

(2)求任意方向法截线方程；

(3)求任意方向法截线曲率半径。

在公式推导中要用到坐标系的旋转变换公式和平面曲线的曲率半径公式，列出如下。

按照右手规则进行右手系空间直角坐标系的旋转变换。绕 Z 轴旋转正 θ 角，则

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_{新}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_{旧}=\boldsymbol{R}_Z(\theta)\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_{旧}$$

式中，$\boldsymbol{R}_Z$ 为旋转矩阵。据此类推，可得绕 X 轴、绕 Y 轴的旋转变换公式。于是，得到如下旋转矩阵

$$\boldsymbol{R}_X(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & \sin\theta\\0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_Y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_Z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

式中，旋转矩阵为正交阵。

由高等数学知，平面曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的曲率半径 R_{x_0} 公式为

$$R_{x_0}=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0}^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0}}$$

(二)公式推导

1. 坐标系 P—xyz 与 O—XYZ 的转换关系

为求得 P—xyz 中的椭球面方程，首先要确定 O—XYZ 与 P—xyz 的转换关系。

如图 5-10 所示，设 P 点位于起始子午面上，即 XOZ 坐标面上，PK 为过 P 点的法线，$PK=N$，$PQ=N(1-e^2)$，由图直接可得 P 点的坐标值为

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N\cos B\\0\\N(1-e^2)\sin B\end{bmatrix}$$

由图 5-10 可以看出，要使 P 点与 O 点重合，要将原点 P 平移至 O；要使 xPz 坐标面与子午面重合，需绕 z 轴旋转 $-A$；要使指向法线的 z 轴与椭球短轴平行，需绕 y 轴旋转 $90^\circ+B$，从而将 P—xyz 转换为 O—XYZ，即

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}_y(90^\circ+B)\boldsymbol{R}_z(-A)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N\cos B\\0\\N(1-e^2)\sin B\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-\sin B\cos A & \sin B\sin A & -\cos B\\ \sin A & \cos A & 0\\ \cos B\cos A & -\cos B\sin A & -\sin B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N\cos B\\0\\N(1-e^2)\sin B\end{bmatrix}\tag{5-24}$$

即

$$\left.\begin{aligned}X&=-(x\cos A-y\sin A)\sin B-z\cos B+N\cos B\\Y&=x\sin A+y\cos A\\Z&=(x\cos A-y\sin A)\cos B-z\sin B+N(1-e^2)\sin B\end{aligned}\right\}\tag{5-25}$$

2. 在 P—xyz 中的椭球面方程式

将式(5-25)代入式(5-23)即可得 P—xyz 中的椭球面方程式。

为了代入方便，现将式(5-23)改写成另一形式。两边同乘以 a^2，并顾及 $\frac{a^2}{b^2}=1+e'^2$，$a^2=N^2W^2=N^2(1-e^2\sin^2B)$，得到 O—XYZ 中椭球面方程的另一表达式

$$X^2+Y^2+Z^2+e'^2Z^2-N^2(1-e^2\sin^2B)=0\tag{5-26}$$

将式(5-25)代入上式,经整理后,即得到 $P—xyz$ 中的椭球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Nz + e'^2[(x\cos A - y\sin A)\cos B - z\sin B]^2 = 0 \tag{5-27}$$

3. 任意方向法截线方程

在 $P—xyz$ 中,因任意方向法截面与 xPz 坐标面重合,故其方程为

$$y = 0$$

将它代入式(5-27),便得到任意方向法截线方程

$$x^2 + z^2 - 2Nz + e'^2(x\cos A\cos B - z\sin B)^2 = 0 \tag{5-28}$$

4. 任意方向法截线曲率半径

由式(5-28)可知,任意方向法截线是一条平面曲线,它的方程可表示为 $z = f(x)$,根据平面曲线曲率半径公式可以写出

$$R_A = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_P^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_P}$$

因为 P 是坐标原点,而且 z 轴和 x 轴分别是法截线的法线和切线,显然有

$$\left.\begin{aligned} x_P = z_P = 0 \\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_P = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

于是得

$$R_A = \frac{1}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_P}$$

显见,由于新坐标系 $P-xyz$ 的建立,使得 R_A 的解算简单了。这里 $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_P$ 就是任意方向法截线在 P 点处的曲率。由式(5-28)对 x 连续求导并顾及式(5-29)可得

$$2 - 2N\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_P + 2e'^2\cos^2 B\cos^2 A = 0$$

即

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_P = \frac{1 + e'^2\cos^2 B\cos^2 A}{N}$$

于是得到任意方向法截线曲率半径公式

$$R_A = \frac{N}{1 + e'^2\cos^2 B\cos^2 A} \tag{5-30}$$

这个公式表明:R_A 不仅与点的纬度 B 有关,而且与法截线的方位角 A 也有关,但与点的经度 L 无关,虽然公式推导时 P 点设在起始子午面上,但它对全球都是适用的。一旦点位定了,纬度 B 就定了,在一点上,N 和 $\cos B$ 都是确定的常数,这时,R_A 仅随 A 的变化而变化。

二、子午圈、卯酉圈曲率半径与平均曲率半径

过椭球面上一点 P 的所有方向的法截线中,有两条特殊方向的法截线:如图 5-11 所示,一条是方位角为 0°(或 180°)的法截线,即子午圈;另一条是方位角为 90°(或 270°)的法截线,即卯酉圈。子午圈和卯酉圈曲率半径在大地测量计算中经常用到。

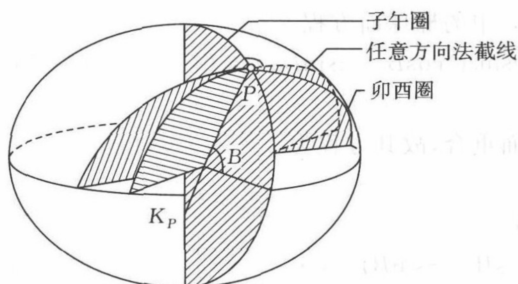


图 5-11 子午圈和卯酉圈

(一)卯酉圈曲率半径

以 $A=90°$代入式(5-30)得

$$R_{90}=N$$

我们曾设图 5-11 中的 $PK_p=N$,因而可知,卯酉圈曲率半径恰好等于法线在椭球面和短轴之间的长度。

由式(5-18),并顾及 $a=c\sqrt{1-e^2}$,$W=V\sqrt{1-e^2}$,则有

$$N=\frac{a}{W}=\frac{c}{V} \tag{5-31}$$

表 5-2 N 的变化规律

B	N	说明
$B=0°$	$N_0=\begin{cases}a\\ \dfrac{c}{\sqrt{1+e'^2}}\end{cases}$	在赤道上卯酉圈即为赤道,N 为赤道半径
$0°<B<90°$	$a<N<c$	N 随纬度增大而增大,其值介于 a 和 c 之间
$B=90°$	$N_{90}=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}\\ c\end{cases}$	在极点上卯酉圈即为子午圈,N 为极曲率半径

因为 $W=\sqrt{1-e^2\sin^2B}$,$V=\sqrt{1+e'^2\cos^2B}$,显而易知,N 是 B 的函数,且随 B 之增大而增大,其变化规律如表 5-3 所示。

表 5-2 还表明,椭球面上一点 P,沿子午圈由赤道至北极移动时,卯酉圈曲率半径的端点 K 也随之移动。如图 5-12 和图 5-13 所示,其轨迹是短轴上由椭球中心 O 向下至 K_N 的一段直线 OK_N。

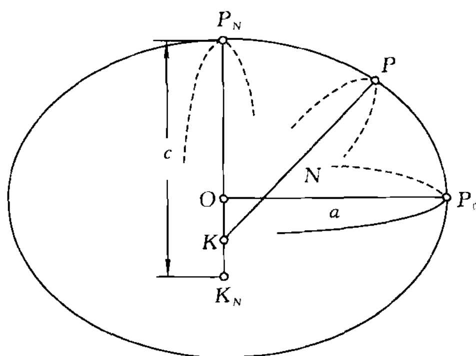


图 5-12 N 的端点轨迹

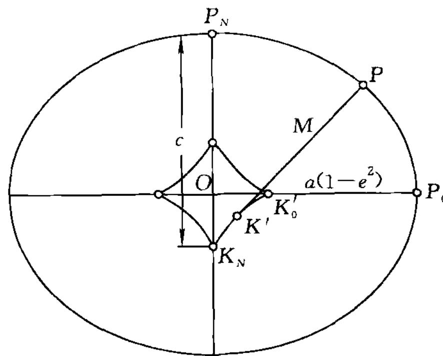


图 5-13 M 的端点轨迹

(二)子午圈曲率半径

以 $A=0°$代入式(5-30)得

$$R_0=M=\frac{N}{1+e'^2\cos^2B}=\frac{N}{V^2}$$

顾及式(5-31)及 $V^2 = \frac{W^2}{1-e^2}$，则有

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3} \tag{5-32}$$

同 N 一样，M 也是 B 的函数，也随 B 之增大而增大，其变化规律如表 5-3 所示。

表 5-3　M 的变化规律

B	M	说明
$B=0°$	$M_0 = \begin{cases} a(1-e^2) \\ \dfrac{c}{(1+e'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$	在赤道上，M 小于赤道半径 a
$0°< B <90°$	$a(1-e^2) < M < c$	M 随纬度增大而增大，其值介于 $a(1-e^2)$ 和 c 之间
$B=90°$	$M_{90} = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}} \\ c \end{cases}$	在极点上，M 等于极曲率半径 c

表 5-2、表 5-3 表明：c 就是过极点的法截线在极点的曲率半径。椭球面上，过极点的法截线都是子午圈，所以极曲率半径 c 就等于子午圈在极点的曲率半径。

表 5-3 还表明，椭球面上一点 P，沿子午圈由赤道至北极移动时，子午圈曲率半径的端点 K' 也随之移动。如图 5-13 所示，其轨迹是椭球中心附近的一支星形线 $K'_0K'K_N$。

由式(5-30)知，当 $A=0°$(或 180°)时，R_A 值最小；当 $A=90°$(或 270°)时，R_A 值最大，所以 N 和 M 分别为 R_A 的极大值和极小值，即除在极点外，N 都大于 M。

由式(5-30)还可看出，当 A 由 0°趋于 90°时，R_A 由 M 趋于 N；当 A 由 90°趋于 180°时，R_A 由 N 趋于 M。由此可见，任意方向曲率半径 R_A 随 A 的变化是以 180°为周期的。又由于式(5-30)与方向有关的项仅是 $\cos^2 A$，故一点的 R_A 在 A、$(180°-A)$、$(180°+A)$、$(360°-A)$ 等方向的值是相同的。因此，R_A 值的变化是以 180°为周期且与子午圈和卯酉圈对称。

(三)平均曲率半径

由于 R_A 值随着方向的不同，其数值也不同，这就给测量计算带来了不便。因此，在一些实际计算中，往往根据实际问题的精度要求，将某一范围内的椭球面当成具有适当半径的球面。显然，这个球的半径取所有方向 R_A 的平均值是合理的。椭球面上一点所有方向法截线曲率半径的平均值，就叫该点的平均曲率半径，用 R 表示。

为了推导方便，对式(5-30)作如下变化

$$R_A = \frac{N}{1+e'^2\cos^2 A\cos^2 B} = \frac{N}{\sin^2 A+\cos^2 A+e'^2\cos^2 A\cos^2 B} =$$
$$\frac{MN}{M\sin^2 A+M(1+e'\cos^2 B)\cos^2 A} = \frac{MN}{N\cos^2 A+M\sin^2 A} \tag{5-33}$$

由于 R_A 的值随 A 的变化对称于子午圈和卯酉圈，所以只需按一个象限求 R_A 的平均值。已知连续函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间的平均值为

$$y_{平均} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

故 R_A 的平均值应为

$$R = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A} \mathrm{d}A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{MN}\sqrt{\frac{M}{N}}\frac{\mathrm{d}A}{\cos^2 A}}{1 + \left(\sqrt{\frac{M}{N}}\tan A\right)^2}$$

设 $t = \sqrt{\frac{M}{N}}\tan A$，则 $\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{M}{N}}\frac{\mathrm{d}A}{\cos^2 A}$。将上式换元后，有

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sqrt{MN} \tag{5-34}$$

上式表明，椭球面上一点的平均曲率半径等于该点子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径的几何平均值。

将 M、N 的表达式(5-32)、式(5-31) 代入式(5-34)，可得 R 的计算式

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} = \frac{c}{V^2} \tag{5-35}$$

椭球面上一点的 M、N、R 均自该点起沿法线向内量取，它们的长度通常是各不相等的，由式(5-31)、式(5-32)、式(5-35)比较可知它们有如下的关系

$$N > R > M$$

当该点位于两极时，有

$$N_{90} = R_{90} = M_{90} = c$$

即 c 值就是极点的曲率半径。

三、子午线弧长与平行圈弧长

在进行椭球面上的一些测量计算时，如高斯投影计算，要用到子午线弧长及平行圈弧长公式，现推导如下。

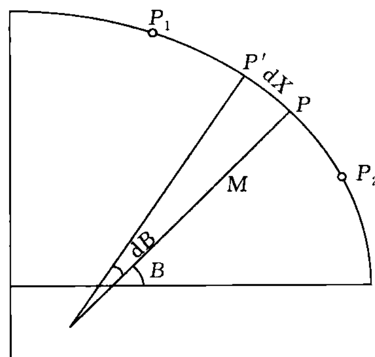


图 5-14 子午线弧长

(一)子午线弧长公式

如图 5-14 所示，设子午圈上两点 P_1、P_2，相应的纬度为 B_1、B_2. 求 P_1、P_2 间的子午线弧长 X。

如果子午线是个圆弧，那么半径乘该弧所对的圆心角即得该弧的弧长。但是，子午线是椭圆弧，要求其弧长，必须用积分的方法。今取子午线上一微小弧段，即弧素 $PP' = \mathrm{d}X$，对应的弧心角(纬差) 为 $\mathrm{d}B$，令 P 点纬度为 B，则 P' 点的纬度为 $B + \mathrm{d}B$。设 P 点的子午圈曲率半径为 M，则弧素 $\mathrm{d}X$ 可看成是以 M 为半径的圆弧，于是有

$$\mathrm{d}X = M\mathrm{d}B \tag{5-36}$$

要求 P_1、P_2 间的弧长 X，就是求 $\mathrm{d}X$ 由 B_1 到 B_2 的积分，即

$$X = \int_{B_2}^{B_1}\mathrm{d}X = \int_{B_2}^{B_1} M\mathrm{d}B$$

顾及式(5-32)，有

$$X = a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}B \tag{5-37}$$

该式是一种椭圆积分，不能直接积分，需要按二项式定理

$$(1-x)^n = 1-\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots \quad (x<1)$$

将其展成级数，有

$$(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} = 1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 B+\frac{15}{8}e^4\sin^4 B+\frac{35}{16}e^6\sin^6 B+\cdots$$

为了积分方便，将正弦的幂函数 $\sin^n B$ 化为余弦的倍角函数 $\cos nB$，即

$$\sin^2 B = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B$$

$$\sin^4 B = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2B+\frac{1}{8}\cos 4B$$

$$\sin^6 B = \frac{5}{16}-\frac{15}{32}\cos 2B+\frac{3}{16}\cos 4B-\frac{1}{32}\cos 6B$$

$$\vdots$$

于是有

$$\begin{aligned}(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} &= 1+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}e^2\cos 2B+\frac{45}{64}e^4-\frac{15}{16}e^4\cos 2B+\\ &\frac{15}{64}e^4\cos 4B+\frac{175}{256}e^6-\frac{525}{512}e^6\cos 2B+\\ &\frac{105}{256}e^6\cos 4B-\frac{35}{512}e^6\cos 6B+\cdots=\\ &A'-B'\cos 2B+C'\cos 4B-D'\cos 6B\end{aligned} \tag{5-38}$$

式中系数

$$\left.\begin{aligned}A' &= 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\cdots\\ B' &= \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\cdots\\ C' &= \frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\cdots\\ D' &= \frac{35}{512}e^6+\cdots\end{aligned}\right\}$$

这些系数，对于确定的椭球都是常数。

将式(5-38)代入式(5-37)，积分后得

$$\begin{aligned}X = a(1-e^2)\Big[&A'\frac{B_2-B_1}{\rho}-\frac{B'}{2}(\sin 2B_2-\sin 2B_1)+\\ &\frac{C'}{4}(\sin 4B_2-\sin 4B_1)-\frac{D'}{6}(\sin 6B_2-\sin 6B_1)+\cdots\Big]\end{aligned} \tag{5-39}$$

这就是子午线弧长的一般公式。后面还有 $\sin 8B$、$\sin 10B$ 等项，$\sin 8B$ 一项最大值只有 0.000 3 m，计算中可视精度要求而决定取舍。

实用中常采用由赤道起至纬度为 B 的子午线弧长公式。此时，以 $B_1=0$，$B_2=B$ 代入式(5-39)得

$$X = a(1-e^2)\left[A'\frac{B}{\rho}-\frac{B'}{2}\sin 2B+\frac{C'}{4}\sin 4B-\frac{D'}{6}\sin 6B+\cdots\right] \tag{5-40}$$

这就是赤道至子午线上某点的子午线弧长公式。

对于 1954 北京坐标系采用的克拉索夫斯基椭球，将其参数代入则得

$$X = 111\,134.861\,1B^{\circ} - 16\,036.480\,3\sin 2B + 16.828\,1\sin 4B - 0.022\,0\sin 6B + \cdots \tag{5-41}$$

对于 1980 西安坐标系采用的 GRS 75 椭球，有

$$X = 111\,133.004\,7B^{\circ} - 16\,038.528\,2\sin 2B + 16.832\,6\sin 4B - 0.022\,0\sin 6B + \cdots \tag{5-42}$$

对于 2000 国家大地坐标系采用的 GRS 80 椭球，有

$$X = 111\,132.952\,547\,00B^{\circ} - 16\,038.508\,741\,268\sin 2B + 16.832\,613\,326\,622\sin 4B - 0.021\,984\,374\,201\,268\sin 6B + 3.114\,162\,529\,164\,8 \times 10^{-5}\sin 8B \tag{5-43}$$

式(5-41)、式(5-42)和式(5-43)中的 B° 表示以度为单位的大地纬度，算得的 X 以 m 为单位。如已知子午线弧长 X，要求对应的大地纬度 B，则要采用迭代法求解。

如以 $B = \frac{\pi}{2}$ 代入式(5-41)，可得一象限的子午线弧长 Q 为

$$Q = 10\,002\,137 \text{ m}$$

即一象限子午线弧长约为 10 000 km，进而可知，地球周长约为 40 000 km。如果按 1800 年德朗布尔椭球（a =6 375 653 m，α =1 : 334.0）求得的 Q 正好就是 10 000 km。实际上，“米”长的最初定义就是按此椭球一象限子午线弧长的千万分之一确定的。现在所用的椭球，其元素精化了，因此子午线弧长不再恰好等于 10 000 km 了。

当弧长较短时（例如当 X <45 km，计算精确到 0.001 m 时），可视子午线为圆弧，圆的半径为该弧平均纬度 $B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ 处的子午圈曲率半径 M_m，而圆心角为两端点的纬度差 $\Delta B = B_2 - B_1$。其计算公式为

$$X = M_m \frac{\Delta B}{\rho}$$

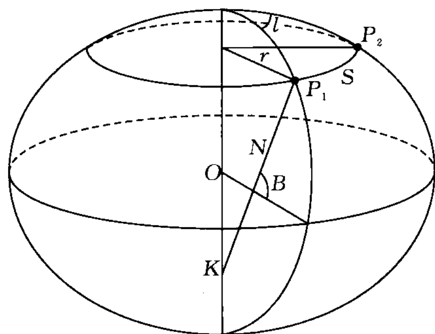


图 5-15 平行圈弧长

(二)平行圈弧长公式

因为平行圈是个圆，所以它的弧长就是所对弧心角（经差）的圆弧长。

在图 5-15 中，P_1、P_2 为平行圈上两点，它们的纬度为 B，经差为 l，平行圈半径为 r，$P_1K = N$ 为卯酉圈曲率半径，则有

$$r = N\cos B \tag{5-44}$$

于是可以写出平行圈弧长公式

$$S = r\frac{l}{\rho} = N\cos B\frac{l}{\rho} \tag{5-45}$$

(三)单位子午线弧长与平行圈弧长随纬度的变化

子午线弧素和平行圈弧素的公式为

$$\left.\begin{aligned} dX &= MdB \\ dS &= rdL \end{aligned}\right\}$$

因为子午圈曲率半径 M 随纬度的升高而缓慢地增长，而平行圈半径 r 随纬度的升高而急剧地缩短，所以，单位纬差的子午线弧长，随纬度的升高而缓慢的增长，呈现“南短北长”；单位

经差的平行圈弧长，则随纬度的升高而急剧的缩短，呈现“南长北短”，如图 5-16 所示。

为了对子午线弧长和平行圈弧长有个数量上的概念，现将一些弧长数值列于表 5-4。

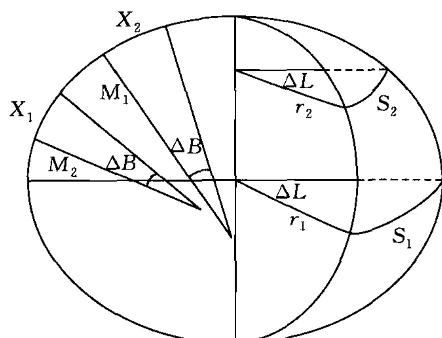


图 5-16　子午线及平行圈弧长变化

表 5-4　子午线弧长和平行圈弧长随纬度的变化

B	子午线弧长/m			平行圈弧长/m		
/(°)	ΔB＝1°	1′	1″	l＝1°	1′	1″
0	110 576	1 842.94	30.716	111 321	1 855.36	30.923
15	110 656	1 844.26	30.738	107 552	1 792.54	29.876
30	110 863	1 847.26	30.795	96 488	1 608.13	26.802
45	111 143	1 852.39	30.873	78 848	1 341.14	21.902
60	111 423	1 857.04	30.951	55 801	930.02	15.500
75	111 625	1 860.42	31.007	28 902	481.71	8.028
90	111 696	1 861.60	31.027	0	0.00	0.000

由表 5-4 可以看出子午线弧长和平行圈弧长随纬度变化的大致情况：纬差为 1°的子午线弧长约为 110 km，1′约为 1.8 km，1″约为 30 m；而平行圈弧长，仅在赤道附近与子午线弧长大体相同，随着纬度升高，它们的差别越来越大。

M 与 R 相差不大，在某些近似计算中，可视地球为球体，球面上的弧长和它所对的弧心角有下列对应关系：

(1)1°弧长≈110 km，1′弧长≈1.8 km，1″弧长≈30 m；

(2)1 km≈30″弧长，1 m≈0.03″弧长，1 cm≈0.000 3″弧长。

我们知道，1 海里＝1.852 km，正好是 1′子午线弧长的值。实际上，海里就是用纬差为 1′的子午线平均长度定义的。

(四)梯形图幅面积

作为子午线弧长和平行圈弧长公式的应用例，我们讨论梯形图幅面积的计算公式。

地形图按经线和纬线分幅，即按照一定的经差和纬差，将椭球表面划分成一系列图幅。如图 5-17 所示，BA、CD 是子午线，BC、AD 是平行圈，A 点的坐标为 B_1、L_1，C 点的坐标为 B_2、L_2。在梯形图幅内取一面积元 $\mathrm{d}P$，其边长分别为 $r\mathrm{d}l$ 和 $M\mathrm{d}B$，则

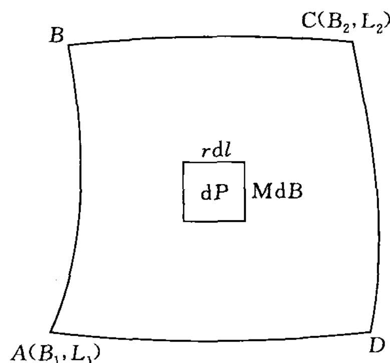


图 5-17　梯形图幅

$$\mathrm{d}P = MN\cos B\mathrm{d}B\mathrm{d}L$$

顾及 $MN = \dfrac{b^2}{(1-e^2\sin^2 B)^2}$，由式(5-35)、式(5-12)得到梯形图幅 $ABCD$ 的面积 P 为

$$P = \int_{L_1}^{L_2}\int_{B_1}^{B_2} MN\cos B\mathrm{d}B\mathrm{d}L = lb^2\int_{B_1}^{B_2}\frac{\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^2}\mathrm{d}B \tag{5-46}$$

式中，$l = L_2 - L_1$。上式按二项式定理展开，积分后得

$$P = \frac{l^\circ}{90^\circ}\pi b^2\Big[A'\sin\frac{1}{2}(B_2-B_1)\cos B_m - B'\sin\frac{3}{2}(B_2-B_1)\cos 3B_m +$$

$$C'\sin\frac{5}{2}(B_2-B_1)\cos 5B_m - D'\sin\frac{7}{2}(B_2-B_1)\cos 7B_m +$$

$$E'\sin\frac{9}{2}(B_2-B_1)\cos 9B_m\Big] \tag{5-47}$$

式中，$B_m=\frac{1}{2}(B_1+B_2)$，各系数为

$$\left.\begin{aligned}
A' &= 1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6+\frac{35}{128}e^8 \\
B' &= \frac{1}{6}e^2+\frac{3}{16}e^4+\frac{3}{16}e^6+\frac{35}{192}e^8 \\
C' &= \frac{3}{80}e^4+\frac{1}{16}e^6+\frac{5}{64}e^8 \\
D' &= \frac{1}{112}e^6+\frac{5}{156}e^8 \\
E' &= \frac{5}{2304}e^8
\end{aligned}\right\}$$

设有比例尺 1∶100 万的梯形图幅，南北图廓的纬差为 $B_2-B_1=4°$，东西图廓的经差 $l=6°$，代入上式即得该梯形图幅的面积：

$$P=\frac{\pi b^2}{15}[A'\sin 2°\cos B_m-B'\sin 6°\cos 3B_m+$$
$$C'\sin 10°\cos 5B_m-D'\sin 14°\cos 7B_m+E'\sin 18°\cos 9B_m]$$

在式(5-47)中，设 $l=360°$，$B_1=0°$，$B_2=90°$，并乘以 2，则得椭球总面积公式

$$\Sigma=4\pi b^2[A'+B'+C'+D'+E'+\cdots]=$$
$$4\pi b^2\left[1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+\frac{5}{9}e^8+\cdots\right] \tag{5-48}$$

对于克拉索夫斯基椭球，其总面积约为 510 083 060 km^2，可见地球总面积约为 5.1 亿平方公里。

四、相对法截线

先来看看椭球面上两点间对向方向观测所形成的法截线。如图 5-18 所示，A、B 为椭球面上两点，设它们的法线 AK_a、BK_b 与其相应的铅垂线重合，如以它们为测站，则照准面就是法截面。由 A 点照准 B 点，则照准面 AK_aB 与椭球面的截线 AaB 即为 A 点对 B 点的法截线。同样，由 B 点照准 A 点，则照准面 BK_bA 与椭球面的截线 BbA，即为 B 点对 A 点的法截线。AaB 和 BbA 这两条法截线，通常是不重合的，叫做 A、B 两点间的相对法截线。

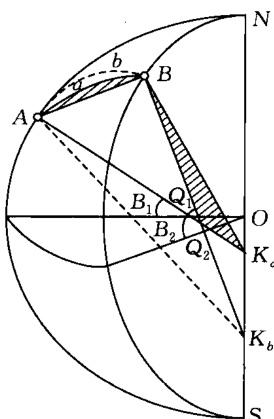


图 5-18 相对法截线

我们可以想到，如果 A、B 两点法线在同一平面上，则对向观测的两个照准面重合，法截线为一条，而当 A、B 两点法线不在同一平面上时，对向观测的两个照准面就不重合，法截线就为两条，可见相对法截线产生的原因是 A、B 两点法线不在同一平面上。

下面说明，椭球面上 A、B 两点，它们的经纬度各不相同时，其法线 AK_a、BK_b 不在同一平面上。

我们知道，假如 AK_a、BK_b 共面，则该两直线或者平行或者相交。在图 5-18 中，A、B 两点不在同一子午圈上，即经度不同，一般地两法

线与短轴的交角不等，故该两法线不平行；又因为短轴是两子午面的交线，故位于该两子午面上的法线如相交的话，只能交于短轴。

设两点的纬度为 B_1、B_2，法线 AK_a、BK_b 分别与赤道面交于 Q_1、Q_2。由图 5-18 可得

$$OK_a = Q_1K_a\sin B_1$$
$$OK_b = Q_2K_b\sin B_2$$

顾及法线在赤道下侧的长度 $QK = Ne^2$，则有

$$\left.\begin{aligned}OK_a &= N_1e^2\sin B_1\\ OK_b &= N_2e^2\sin B_2\end{aligned}\right\}$$

由上式可知，当 $B_1 \neq B_2$ 时，则 $OK_a \neq OK_b$，故 K_a、K_b 不重合。这就说明 AK_a、BK_b 不在同一平面上。当 A、B 两点位于同一子午圈或同一平行圈上时，正反法截线则合二为一，这是一种特殊情况。

从上式还可看出，当 $B_2 > B_1$ 时，则 $OK_b > OK_a$。由图 5-18 可知，K_a 在上，K_b 在下。两法截面 AK_aB 与 BK_bA 相交于 AB 弦线，与椭球面分别截于 AaB 和 BbA，而且 BbA 偏上，AaB 偏下。可见，纬度高的点对纬度低的点法截线偏上，纬度低的点对纬度高的点法截线偏下。我们称 AaB 为 A 点的正法截线，BbA 为 A 点的反法截线。根据上述规律，可以画出 AB 方向不同象限中正反法截线的关系位置，如图 5-19 所示。

相对法截线通常是不重合的，仅当两点经度或纬度相同时才重合为一。正反法截线之间的夹角 Δ（见图 5-20），在一等三角测量中，一般可达 0.004″，甚至可达百分之几秒（与距离的平方成正比），对于一等三角测量计算是不容忽视的。

由于相对法截线的存在，给测量计算带来不便。设椭球面上有 A、B、C 三点，其经度 $L_C > L_B > L_A$，纬度 $B_B > B_C > B_A$，在对向三角观测中，就会产生如图 5-20 所示的情况。图中由正法截线构成的三个角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，并不能构成一个三角形。这就是说相对法截线造成了几何图形的破裂。

显然，不能依据这种破裂的图形进行计算，必须在两点之间选用一条单一的曲线来代替相对法截线。椭球面上两点间的单一曲线有很多种，但我们要求两点间的曲线必须是唯一的，并且具有明显的几何特性（比如最短线）以及便于椭球面上的测量计算。这种曲线就是大地线。

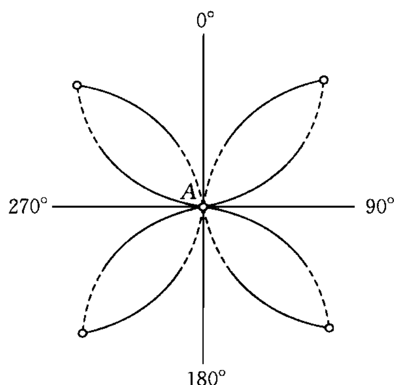


图 5-19　相对法截线的位置

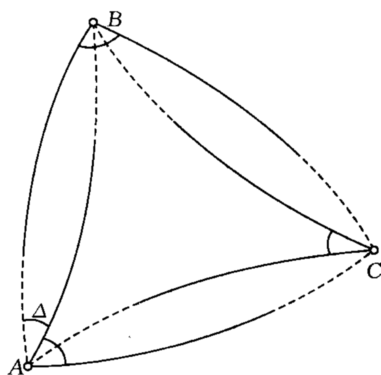


图 5-20　相对法截线构成的图形

五、大地线

(一)大地线的定义

大地线是一曲面曲线,在该曲线上各点的相邻两弧素,位于该点的同一法截面中。

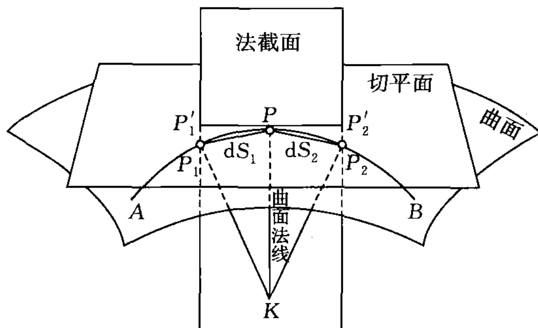


图 5-21 大地线定义

用图 5-21 来解释这个定义。设 AB 为曲面上的一条大地线,P 为大地线上任一点,dS_1、dS_2 为 P 点相邻两弧素,PK 为 P 点的曲面法线。因为 dS_1、dS_2 都是弧素,即 P_1、P_2 与 P 无限接近,故可用弦线 PP_1、PP_2 来代替 dS_1、dS_2。于是 dS_1 位于法截面 PKP_1 中,dS_2 位于法截面 PKP_2 中。根据定义,上述两个法截面应在 P 点的同一法截面中。或者说,无限邻近的 P、P_1、P_2 三点都在 P 点的同一法截面中。如果一条曲线上,每点都具有这个特性,那么这条曲线就是大地线。

大地线的另一个定义是:大地线是一曲面曲线,在该曲线上任一点的曲线主法线与该点的曲面法线重合。这个定义用于判断椭球面上的曲线是否为大地线比较方便。下面对此定义作出解释。

对于空间曲线,凡是通过曲线一点而垂直于该点切线的直线,都叫做曲线在这点的法线。因此,空间曲线在给定点具有一束法线,它们的集合是一平面,称为法平面。所谓曲线的主法线是法平面上指向曲线凹侧的一根特殊的法线。这个定义与前一个定义是一致的,因为任取一段弧素便确定了曲线在该点的凹侧,亦即确定了曲线主法线,而法截面又由曲面法线确定,要求这段弧素位于法截面中,故曲线主法线与曲面法线一致。

(二)大地线的性质

1. 大地线是椭球面上两点间的最短线

在图 5-21 中,将大地线上 P 点的相邻两弧素正射投影到该点的椭球面的切平面上,得到 $P'_1PP'_2$,因三点在同一法截面上,所以 $P'_1PP'_2$ 是一直线元素,而平面上两点间直线为最短。大地线上每点相邻两弧素的正射投影都为直线元素,所以大地线为最短线。但是其他曲线弧素,例如斜截线弧素,在切平面上的投影必定是曲线弧素。平行圈就是斜截线,在图 5-22 中,PP_1 和 PP_2 为平行圈上 P 点的相邻两弧素,它在 P 点切平面 T 上的正射投影是曲线弧素 $P'_1PP'_2$。

2. 大地线是无数法截线弧素的连线

由于大地线上一点的相邻两弧素位于同一法截面中,所以可以把它们看成是该点上方向相差 180°的两个法截线弧素,于是大地线就是各点上这些法截线弧素的连线。如果我们在椭球面上作一条直伸导线,如图 5-23 所示,令各转折角为 180°,各边非常短小,短到两条相对法截线合而为一,如图中 ab、ba 合而为$\overline{ab}$,那么,这样的短边直伸导线就是大地线。

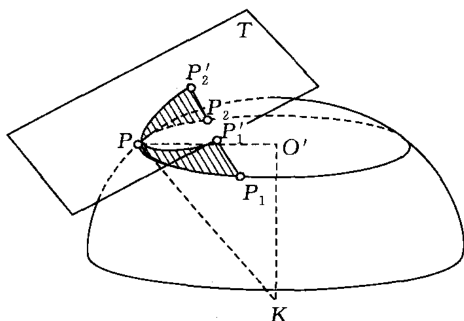


图 5-22 平行圈弧素的正射投影

椭球面上的法截线,除子午圈和赤道是大地线

外，其他法截线都不是大地线。注意，法截线只是通过某点的一个法截面，而大地线则是通过沿线各点的所有法截面。

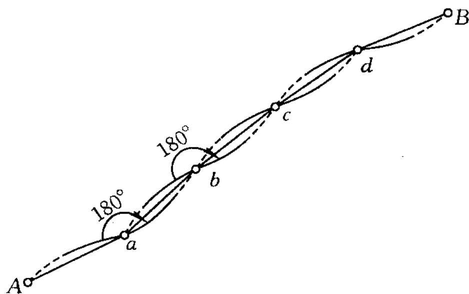


图 5-23　用导线法作大地线

3. 椭球面上的大地线是双重弯曲的曲线

大地线依附在椭球面上，由于椭球面的弯曲使大地线产生纵向弯曲，这种弯曲由各点的曲率来描写；由于大地线上各点经纬度不同，各点法线不相交，法截面不重合，又使大地线产生横向弯曲，这种弯曲由各点的挠率来描写，如图 5-24 所示。所以椭球面上的大地线，除子午圈和赤道外，是既有曲率又有挠率的曲线。

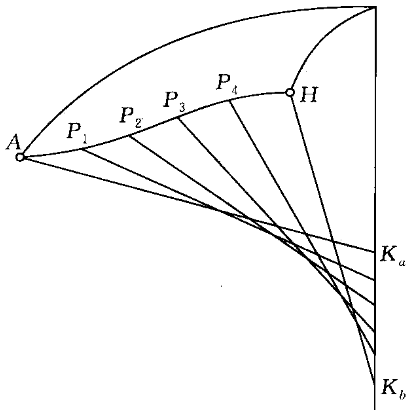


图 5-24　大地线的形状

如果在一绝对光滑的椭球面上，两点间绷一橡皮筋，那么这条绷紧的橡皮筋，就是两点间的大地线。因为每点上橡皮筋加于椭球面的压力方向就是曲线主法线，椭球面对这一点的支撑力方向就是曲面法线，橡皮筋在静止状态下两者重合。因此，由于弹性存在，橡皮筋在两点间总是表示最短的路径。

4. 大地线位于相对法截线之间

通常情况下，在椭球面上，大地线位于相对法截线之间，并且靠近正法截线，它分相对法截线的夹角约为二比一，即 $\mu:\gamma=2:1$，如图 5-25 所示。γ 的数值在一等三角测量中可达 0.001″～0.002″，在计算中必须要顾及改正（称为截面差改正）。大地线与法截线的长度相差甚微，如某点的大地纬度 $B=0°$，边的大地方位角 $A=45°$，边长 $S=100$ km，则大地线与法截线的长度差 $\Delta S=0.000\,001$ mm，可见实用中完全可忽略。

在子午圈和赤道上，大地线和相对法截线重合为一，并且分别与子午圈和赤道重合。在平行圈上，相对法截线虽然合而为一，但大地线、法截线和平行圈三者都不重合。

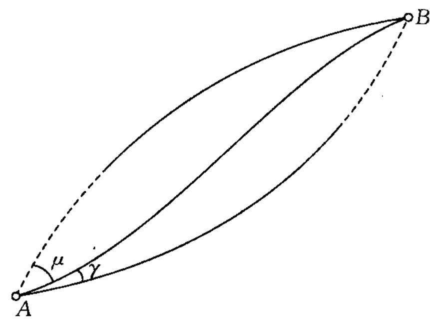


图 5-25　大地线与相对法截线的位置关系

（三）大地线微分方程

所谓大地线微分方程，就是大地线长度与大地经纬度、大地方位角间的微分关系式。

如图 5-26 所示，P 为大地线上任一点，其经度为 L，纬度为 B，大地方位角为 A。取 PP_1 为大地线弧素 $\mathrm{d}S$，由 P 点变化到 P_1 点时，其经度变为 $L+\mathrm{d}L$，纬度变为 $B+\mathrm{d}B$，方位角变为 $A+\mathrm{d}A$。

由图 5-26 可知，与 PP_1 相应的子午圈弧素 $P'P_1=M\mathrm{d}B$，平行圈弧素 $PP'=r\mathrm{d}L=N\cos B\mathrm{d}L$。图中 $PP'P_1$ 为椭球面直角三角形，由于无限微小，可视为平面直角三角形，因而可得

$$M\mathrm{d}B=\mathrm{d}S\cos A$$

即

图 5-26　大地线微分关系

$$dB = \frac{\cos A}{M} dS \tag{5-49}$$

以及

$$r dL = dS \sin A$$

即

$$dL = \frac{\sin A}{r} dS = \frac{\sin A}{N} \sec B dS \tag{5-50}$$

以上两个微分方程，是在三角形无限微小的情况下得出的，它适用于椭球面上的任意曲线，当然也适用于大地线，但不是大地线所专有的。要导出大地线所专有的微分方程，就必须顾及大地线的定义。

图 5-26 中 PP_1 为大地线上 P_1 点的一段弧素，设 P_1P_2 为 P_1 点相邻的另一弧素，由大地线定义可知，PP_1 和 P_1P_2 应该位于 P_1 点的同一法截面中，因此 PP_1P_2 为 P_1 点的法截线弧素，且在 P_1 点切平面上的正射投影为一直线元素。

作 P_1 点的切平面，过 P_1 和 P 分别作子午线的切线，由于 P 和 P_1 点无限接近，故可视二切线同交于短轴延长线上的 T 点，并且 P_1T 和 PT 所决定的平面可视为 P_1 点的切平面。于是，大地线弧素 PP_1P_2 可认为是切平面上的直线。$\angle TP_1P_2 = A + dA$，它是平面三角形 TPP_1 的外角，可以写出

$$A + dA = A + \angle P_1TP, \text{ 即 } \quad dA = \angle P_1TP$$

又因 dS 是弧素，P' 也无限接近 P_1，故可视 P' 也在 P_1 点的切平面上，于是由小扇形 TPP' 可得

$$dA = \frac{r dL}{PT} = \frac{N \cos B dL}{PT}$$

由直角三角形 K_PPT 可知，$PT = N \cot B$，代入上式即得

$$dA = \sin B dL$$

将式(5-50)代入即得

$$dA = \frac{\sin A}{N} \tan B dS \tag{5-51}$$

通常把式(5-49)、式(5-50)、式(5-51)称为大地线的三个微分方程。它们是椭球面上大地坐标计算的基础。如果以增量代替微分，即可得到大地纬差、经差和方位角差的近似计算公式

$$\left.\begin{aligned}
\Delta B &= \frac{S}{M} \cos A \\
\Delta L &= \frac{S}{N} \sin A \sec B \\
\Delta A &= \frac{S}{N} \sin A \tan B
\end{aligned}\right\} \tag{5-52}$$

(四)大地线的克莱罗方程

将大地线微分方程积分，就可得到克莱罗方程。它是长距离大地问题解算的基础。

由式(5-51)，得

$$dA = \frac{\sin A \sin B}{N\cos B} dS$$

顾及式(5-49) $dS = \frac{M}{\cos A} dB$，得

$$dA = \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{M\sin B dB}{N\cos B}$$

如图 5-27 所示，P 为椭球面上一点，PP' 为子午线弧素，$PP' = MdB$，P 点和 P' 点平行圈半径之差为 dr，当 P' 点变化至 P 点时，纬度增大，而平行圈半径减小。视 $PP'P''$ 为微小的平面直角三角形，则有

$$M\sin B dB = -dr$$

图 5-27　由子午线弧素求 dr

顾及 $r = N\cos B$，一并代入上式得

$$dA = -\frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{dr}{r}$$

即

$$r\cos A dA + \sin A dr = 0$$

$$\cot A dA = -\frac{dr}{r}$$

积分之，得

$$r\sin A = C \tag{5-53}$$

这就是大地线的克莱罗方程。该方程表明：大地线上各点的平行圈半径与该点大地线方位角的正弦之乘积为一常数。

六、椭球面三角形的解算

建立了地面与椭球面的对应关系后，地面控制网就变成了椭球面上以大地线组成的控制网。要进行控制网的边角计算，需进行椭球面三角形的解算。由于椭球面上各点的曲率不同，因而在这个面上解算三角形就比较复杂。但是，地球椭球的扁率很小；通常大地控制网中由三边所组成的椭球面三角形又比较小，因此人们自然会想到可否将椭球面三角形当作球面三角形来解算。经过研究表明，当三角形的边长小于 200 km 时，将椭球面三角形看作以其三个顶点平均纬度处的平均曲率半径为球半径的球面三角形是完全可以的（两者对应边长相等，对应角之差小于 0.001″）。

为了解算球面三角形，可采用如下的正弦公式

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin C}$$

上式中的边长是用角度表示的，因此必须先将已知边长除以球的半径化为球心角，方可应用上式进行计算。算得的以角度表示的边长还要再化为长度，因为实用上边长总是以长度表示的。这样化来化去，显得不方便，同时还存在计算舍入误差对计算精度的影响。

可设法寻找一种更简单的解算方法。这里介绍的勒让德定理就是一种简便的解算球面三角形的方法。该法的实质是将球面三角形化为对应边长相等的平面三角形来解算，但对各球面角需作简单的改化。

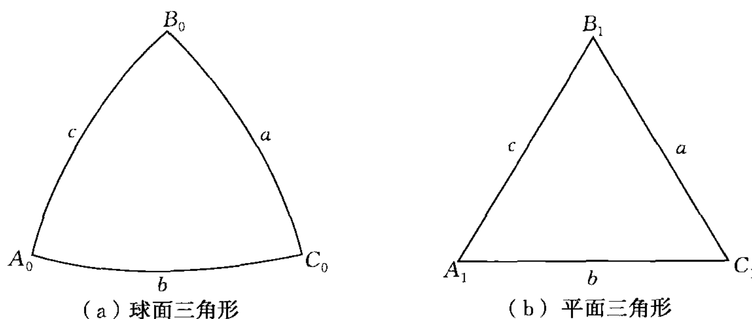
如图 5-28 所示，设一球面三角形 $A_0B_0C_0$，其三边长为 a、b、c，球面角超为 ε''。如以同样边长 a、b、c 为三边作一平面三角形 $A_1B_1C_1$，当边长不甚大时，可以证明这两个三角形的三内角间有如下的关系

$$\left.\begin{aligned}A_1 &= A_0 - \varepsilon''/3\\ B_1 &= B_0 - \varepsilon''/3\\ C_1 &= C_0 - \varepsilon''/3\end{aligned}\right\} \tag{5-54}$$

式中，$\varepsilon'' = \dfrac{\Delta}{R^2}\rho''$。

其中，Δ 为平面三角形的面积，R 为球的半径。

上式就是解算球面三角形的勒让德定理。它表明，如果将球面三角形 $A_0B_0C_0$ 的每一角度减去其球面角超的 1/3，就得到一个相应边和它相等的平面三角形 $A_1B_1C_1$，按平面三角形公式解此三角形，得出的边长即为所求的球面边长。



（a）球面三角形 （b）平面三角形

图 5-28 对应边长相等的球面三角形和平面三角形

§5-5 地面边角观测元素归算至椭球面

一、归算的意义和要求

常规大地测量确定地面点的水平坐标 L、B 和高程是作为分开的两类问题进行研究的。为了解决前类问题，要把实际上建立在地球自然表面的大地控制网投影到所采用的参考椭球面上，即对大地网的测量元素作相应的归算，也就是说，将点与点之间在地球自然表面上测量的边长化算为这些点投影到参考椭球面上所得的大地线弧长，将水平方向和天文方位角的观测值化算为大地线的方向和大地方位角（见图 5-29）。之后，大地控制网的所有计算，都在椭球面上作为二维问题解决。平差计算出 L、B 后，通过确定的数学关系式可化为平面坐标 x、y。对于大规模天文大地网的平差计算，通常采用这一过程完成。

对于小范围的大地控制网，如仍在椭球面上进行平差计算有时会使问题不够方便，因为椭球面的数学性质比平面要复杂得多，于是我们可以将大地控制网的元素再一次从椭球面投影到平面上，然后在平面上进行计算处理（见第六章）。

实现地面元素到椭球面元素的归算，就是对地面观测元素加入适当改正数，使之转化为椭球面上相应的元素，以能在椭球面上进行测量计算。归算的精确程度应不损害野外观测的精度。

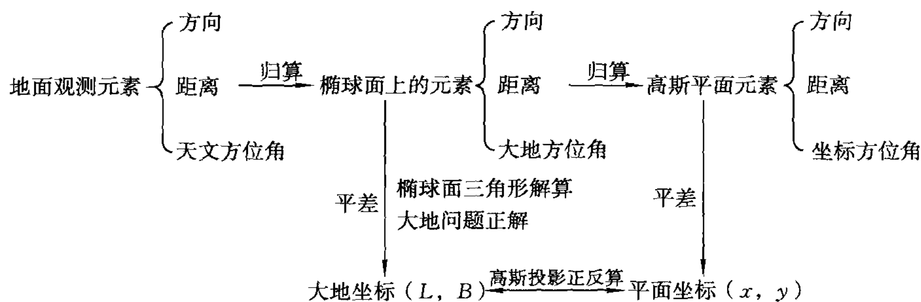


图 5-29　由观测值解算水平坐标

地面边角观测元素归算到椭球面，有三项基本要求

(1)以椭球面法线为基准线。测站点的铅垂线方向与相应的椭球面法线方向一般是不重合的，它们间的夹角叫做垂线偏差。以椭球面法线为基准线就是将铅垂线为准的观测值化为法线为准的观测值，消除垂线偏差的影响。

(2)以椭球面为基准面。地面点沿法线投影到椭球面，将具有一定高程的观测值化为椭球面上的观测值，消除大地高的影响。

(3)椭球面两点连线用大地线。将法截线方向的观测值化为大地线方向的观测值，消除截面差的影响。

通过上述归算，就将地面边角控制网化算到了椭球面上，如图 5-30 所示。由此可见，归算的实质是实现地面元素和椭球面元素的转换。

地面边角观测元素的归算，包括水平观测方向的归算、观测天顶距的归算、地面长度的归算、天文方位角的归算等。另外，归算所需的必须量——垂线偏差的计算也是本节研究的内容之一。

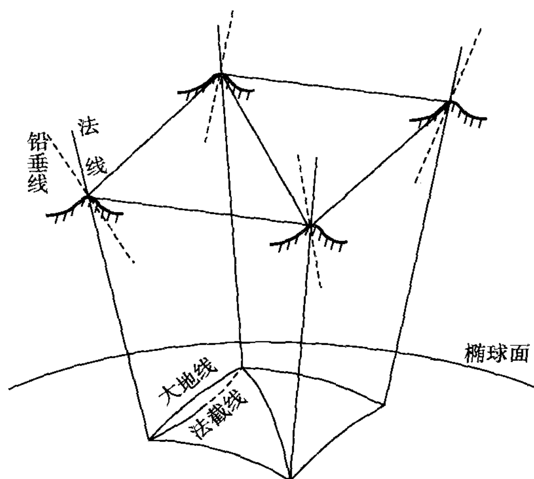


图 5-30　地面控制网归算至椭球面

二、水平观测方向归算到椭球面

水平方向归算到椭球面上，需进行垂线偏差改正、标高差改正和截面差改正，通常把这三项改正简称为三差改正。

(一)垂线偏差改正

地面点是沿法线投影到椭球面上的。测站点铅垂线方向与相应的椭球面法线方向不一致，对方向观测值必有影响，这项影响叫做垂线偏差改正，以 δ_1 表示。

显然这是一个求解空间角度间关系的问题。求解空间角度关系的一个有效方法是通过建立一个辅助球，将空间角度用辅助球上的弧长来表示，即把空间角度化算到球面上，于是就可用求解球面三角形的方法解此问题。

如图 5-31 所示，以测站点 A 为中心作一辅助球。过 A 点作法线与辅助球交于 Z，称为大地天顶；过 A 点作垂线与辅助球交于 Z_1，称为天文天顶。法线与垂线的交角为垂线偏差 μ。过 A 点作椭球短轴的平行线，与辅助球交于 P 点，称为辅助球上的北极；$ZP\theta$ 是辅助球上的子午圈，它

是椭球子午面与辅助球的交线。地面观测目标 m 在球面上的投影为 M。由于直线或平面平移后，空间角度不发生变化，故引入北极和子午圈后，在辅助球上就可以将 Am 方向的方位角表示出来了。垂线偏差 μ 在球面上是一段小弧长，故可把它分解成垂直方向上的两个分量 ξ 和 η，分别称为 μ 在子午圈和卯酉圈上的分量，由图显见

图 5-31 垂线偏差改正

$$\xi = \mu\cos\theta, \quad \eta = \mu\sin\theta$$

由图 5-31 可见，如果 M 在 ZZ_1O 垂直面内，则无论观测方向以法线或以垂线为准，照准面都是一个，就无垂线偏差改正，因此我们以 AO 方向作为参考方向(度盘零方向)。图中，以垂线 AZ_1 为准，照准 m 点得度盘读数 OR_1；若以法线 AZ 为准，照准 m 点得度盘读数 OR，故垂线偏差对水平方向的影响 δ_1 为 $\delta_1=(R-R_1)$。

R_1MR 为球面直角三角形，根据正弦定理，得

$$\sin(R_1R) = \sin(-\delta_1) = \sin(90 - z_1)\sin q$$

z_1 为 M 方向的观测天顶距。又在三角形 MZZ_1 中，由正弦定理有

$$\sin q = \sin\mu\,\frac{\sin R}{\sin z_1}$$

代回上式，得

$$\sin(-\delta_1) = \cos z_1\sin\mu\,\frac{\sin R}{\sin z_1}$$

因 δ 和 μ 均为小量，故有

$$-\delta_1 = \mu\sin R\cot z_1$$

而 $R = A - \theta$(A 为 A 点至 m 点的大地方位角)，则

$$-\delta_1 = \mu\sin(A-\theta)\cot z_1 = \mu(\sin A\cos\theta - \cos A\sin\theta)\cot z_1$$

已知 $\xi = \mu\cos\theta, \eta = \mu\sin\theta$，故

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -(\xi\sin A - \eta\cos A)\cot z_1 = \\ &-(\xi\sin A - \eta\cos A)\tan\alpha_1 \end{aligned} \tag{5-55}$$

式中，α_1 为照准方向的垂直角。可见，垂线偏差改正主要与测站的垂线偏差和观测目标的天顶距(垂直角)有关。

图 5-31 中，与垂线垂直和与法线垂直的水平度盘应不重合，它们的夹角为 μ，但因 μ 是小量，对水平方向的读数影响可忽略，故视它们为重合。

μ 通常为几秒到十几秒，垂直角在一、二等三角测量中十分接近 0°，在平原地区通常为 ±30′左右，在山区可能达到±3°，因此 δ_1 的数值通常为十分之几秒。一、二等三角测量应加此项改正。如果垂线偏差和垂直角都较大，甚至三、四等三角测量亦应顾及此项改正。

在下列情况下，垂线偏差改正为零

(1)铅垂线与法线一致，即 $\mu = 0$，则 $\delta_1 = 0$；

(2)照准点在 ZZ_1O 面内，即 $A = \theta$，则 $\delta_1 = 0$；

(3)照准点在水平面上，即 $Z_1 = 90°$，则 $\delta_1 = 0$。

(二)标高差改正

加了δ_1后，方向值为图5-32中Ab'这一法截线的方向。此时，测站A的高程对这个水平方向值没有影响，为简单起见，我们设A在椭球面上。根据归算要求，照准点B在椭球面上的投影点应为b，而非b'。于是法截面Ab'与Ab之间存在角度差δ_2，我们称之为标高差改正。显然这项改正是由于照准点B的高程引起的对归算方向值的影响。

图5-32中，视椭球面三角形Abb'为平面三角形，按正弦定理有

$$\delta_2 = bb' \frac{\sin A_1}{S}\rho''$$

可见，要计算δ_2，先要求出bb'，而在$\Delta Bbb'$和ΔBRK_a中

$$bb' = H_2\theta$$

$$\theta = \frac{K_aR}{BR} \approx \frac{K_aR}{N_2}$$

式中，下标2表示B点的相应值。以下公式中的下标1表示A点的相应值。

又由图显见

$$K_aR = K_aK_b\cos B_2$$

而

$$K_aK_b = OK_b - OK_a = N_2e^2\sin B_2 - N_1e^2\sin B_1 \approx N_2e^2(\sin B_2 - \sin B_1)$$

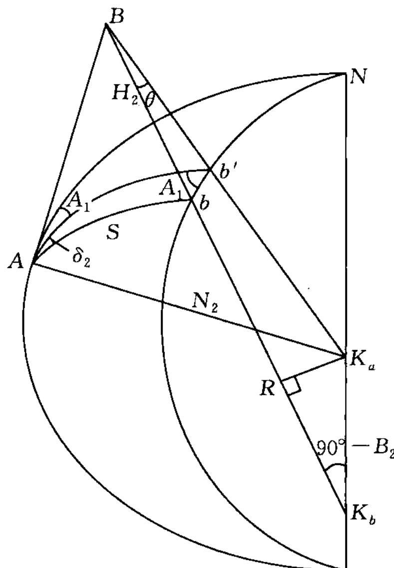


图5-32　标高差改正

顾及大地线微分方程$B_2 \approx B_1 + \dfrac{S\cdot\cos A_1}{M_1}$，有

$$K_aK_b = N_2e^2\cos B_1\frac{S\cos A_1}{M_1}$$

将以上公式回代并整理，有

$$\delta_2 = \frac{e^2H_2\rho''}{2M_2}\cos^2B_2\sin 2A_1 \tag{5-56}$$

式中，B_2、M_2为照准点的大地纬度和子午圈曲率半径；A_1是观测方向的大地方位角；H_2是照准点标的（观测中的实际照准部位）高出椭球面的高程，由三部分组成

$$H_2 = H_{2常} + \zeta_2 + a_2$$

其中，$H_{2常}$为照准点标石中心的正常高；ζ_2为照准点的高程异常；a_2为照准点的觇标高。

由式(5-56)可见，标高差改正主要与照准点的高程有关。

取$B_2=45°$，$A_1=45°$，$\rho''/M_2=1/30$。当$H_2=200$ m时，$\delta_2=0.01''$；当$H_2=1\,000$ m时，$\delta_2=0.05''$。可见，在一、二等三角测量，以及海拔较高地区的三、四等三角测量中，应顾及标高差改正。

在下列情况时，标高差改正为零

(1)照准点在椭球面上，即$H_2=0$，则$\delta_2=0$；

(2)照准点与观测点同经度或同纬度，即$A_1=0°$、$90°$、$180°$、$270°$时，$\delta_2=0$。

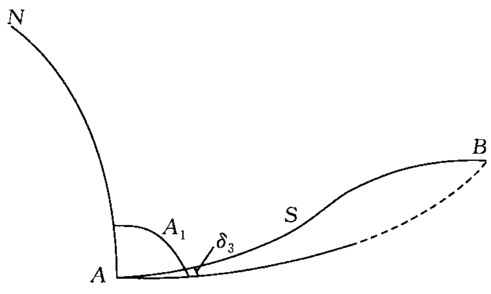


图 5-33 截面差改正

(三)截面差改正

由于椭球面上两点的联线以大地线为准，故上述图 5-32 中正法截线 Ab 方向要化为大地线方向，这项改正称为截面差改正，以 δ_3 表示之，如图 5-33 所示。

截面差改正公式为

$$\delta''_3 = -\frac{e^2 S^2 \rho''}{12N_1^2}\cos^2 B_1 \sin 2A_1 \tag{5-57}$$

可见，截面差改正主要与测站至照准点的距离有关。

取 $B_1=45°$，$A_1=45°$。当 $S=30$ km 时，$\delta_3=-0.001''$；$S=60$ km 时，$\delta_3=-0.005''$。可见，一等三角测量中一般应加截面差改正，而二等以下无须顾及此项改正。

当 $A_1=0°$、$90°$、$180°$、$270°$时，$\delta_3=0$，即 A、B 两点在同一子午圈或接近于同一平行圈时，截面差改正等于零。

(四)三差改正的计算

现行作业中规定，各等三角测量归算时，一等算至 $0.001''$，二等算至 $0.01''$，三、四等算至 $0.1''$。因此，三差改正并不是在各等三角测量中都要全部计算，这要根据各项改正的数值大小和计算位数的要求而定，特归纳如表 5-5 所示。

表 5-5 三差改正的计算

<table>
<tr><th>三差改正</th><th>归算意义</th><th>主要关系量</th><th>通常数值</th><th>一等</th><th>二等</th><th>三、四等</th></tr>
<tr><td>δ_1</td><td>化为法线为准的观测方向值</td><td>ξ、η</td><td>$0.05''\sim0.1''$</td><td rowspan="3">加</td><td rowspan="2">加</td><td rowspan="2">酌情</td></tr>
<tr><td>δ_2</td><td>化为椭球面上的法截线方向值</td><td>H_2</td><td>$0.01''\sim0.7''$</td></tr>
<tr><td>δ_3</td><td>化为椭球面上的大地线方向值</td><td>S</td><td>$0.001''\sim0.007''$</td><td colspan="2">不加</td></tr>
</table>

下面给出三差改正的算例。

1. 计算公式

$$\left.\begin{aligned}
\delta''_1 &= -(\xi''\sin A_1 - \eta''\cos A_1)\tan\alpha \\
\delta''_2 &= \frac{e^2 H_2 \rho''}{2M_2}\cos^2 B_2 \sin 2A_1 \\
\delta''_3 &= -\frac{e^2 S^2 \rho''}{12N_1^2}\cos^2 B_1 \sin 2A_1 \\
V &= \sqrt{1+e'^2\cos^2 B} \\
N &= \frac{c}{V} \\
M &= \frac{N}{V^2} \\
\Sigma\delta &= \delta_1+\delta_2+\delta_3
\end{aligned}\right\} \tag{5-58}$$

2. 计算实例

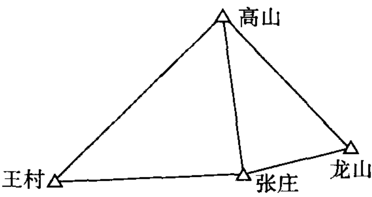


图 5-34　三角网

王村、张庄、龙山、高山四点构成的三角网略图如图 5-34所示，已知数据表和观测方向值的三差改正计算表见表 5-6、表 5-7(采用 1954 北京坐标系)。

表 5-6　已知数据表

测站	照准目标的正常高 $H_常+a$ /m	高程异常 Z /m	垂线偏差 ξ /(″)	垂线偏差 η /(″)	大地纬度 B /(° ′)	方向	化至标石中心的观测方向值 /(° ′ ″)	边长 S /km	大地方位角 A /(° ′)	垂直角 α /(′ ″)
高山	3 579.8	+26.6	+5.5	−2.5	32 31	龙山	0 00 00.00	30.7	128 17	−16 51
						张庄	40 43 53.34	22.0	169 01	+23 02
						王村	102 36 11.45	38.1	230 53	+23 02
龙山	3 494.9	+29.1	+7.6	−1.6	32 20	张庄	0 00 00.00	20.1	262 42	+40 54
						高山	45 43 17.99	30.7	308 25	+02 04
张庄	3 759.2	+29.3	+6.8	−1.7	32 19	王村	0 00 00.00	33.8	265 58	+19 54
						高山	83 04 05.16	22.0	349 02	−33 00
						龙山	176 36 54.63	20.1	82 35	−49 51
王村	3 931.7	+29.2	+6.2	−1.9	32 17	高山	0 00 00.00	38.1	50 26	−40 54
						张庄	35 03 37.45	33.8	85 30	−25 06

表 5-7　观测方向值化至椭球面之计算

测站	方向	化至标石中心的观测方向值 L_D /(° ′ ″)	三差改正 δ_1 /(″)	三差改正 δ_2 /(″)	三差改正 δ_3 /(″)	$\Sigma\delta$ /(″)	归零 /(″)	椭球面上的方向值 L_0 /(° ′ ″)
高山	龙山	0 00 00.00	+0.014	−0.266	+0.002	−0.250	0.000	0 00 00.00
	张庄	40 43 53.34	+0.009	−0.110	0. 000	−0.100	+0.150	40 43 53.49
	王村	102 36 11.45	+0.039	+0.301	−0.003	+0.337	+0.587	102 36 12.04
龙山	张庄	0 00 00.00	+0.092	+0.074	0.000	+0.166	0.000	0 00 00.00
	高山	45 43 17.99	+0.003	−0.271	+0.002	−0.267	−0.433	45 43 17.56
张庄	王村	0 00 00.00	+0.038	+0.043	0.000	+0.081	0.000	0 00 00.00
	高山	83 04 05.16	+0.004	−0.104	0.000	−0.100	−0.181	83 04 04.98
	龙山	176 36 54.63	+0.101	+0.070	0.000	+0.171	+0.090	176 36 54.72
王村	高山	0 00 00.00	+0.071	+0.274	−0.003	+0.342	0.000	0 00 00.00
	张庄	35 03 37.45	+0.046	+0.046	0.000	+0.092	−0.250	35 03 37.20

三、观测天顶距的归算

按三角高程测量方法计算地面相邻两点的大地高高差时要用到天顶距。在三角点上观测时是以铅垂线为准的，测得的是天文天顶距 z_1，但在椭球面上计算高差时，要求以法线为准，

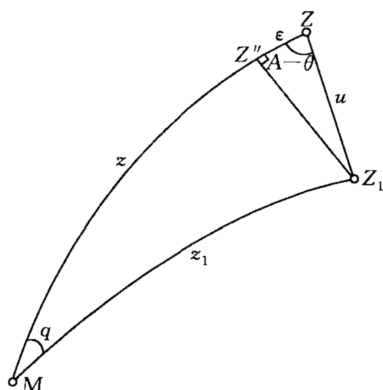


图 5-35 ε 的推导

计算用的是大地天顶距 z,由于垂线偏差的影响,这两种天顶距是有差异的,因此需要进行归算。设 $z - z_1 = \varepsilon$,则有

$$z = z_1 + \varepsilon \tag{5-59}$$

式中,ε 叫做观测天顶距的垂线偏差改正。下面推导它的表达式。

将图 5-31 中的球面三角形 ZZ_1M 取出(见图 5-35)。作 Z_1Z'' 垂直于 ZM,因 q 是一小量,故 $ZZ'' = \varepsilon$,又由图知,在 $\Delta ZZ_1Z''$ 中

$$\begin{aligned}\varepsilon = & u\cos(A-\theta) = \\ & u\cos\theta\cos A + u\sin\theta\sin A = \\ & \xi\cos A + \eta\sin A\end{aligned}$$

于是得

$$z = z_1 + \xi\cos A + \eta\sin A \tag{5-60}$$

这就是观测天顶距的归算公式。式中 ξ、η 是测站点垂线偏差的子午分量和卯酉分量;A 是观测方向的大地方位角。

四、地面观测长度归算至椭球面

用测距仪测得的长度是连接地面两点间的直线斜距,须将其归算到椭球面,即由 D 化为大地线长 S(见图 5-36),称为斜距归算。

下面我们推导短距离的斜距归算公式,作以下两点近似:认为 K_aK_b 重合;视大地线 S 为大圆弧。于是图 5-36 中的归算问题可转化为解平面三角形,见图 5-37。在此基础上,进一步顾及以上两项近似产生的误差项,可推导长距离的斜距归算公式。

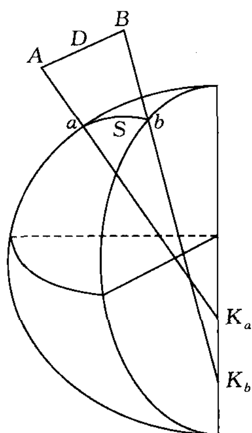


图 5-36 斜距归算

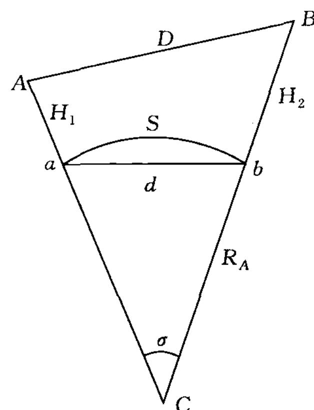


图 5-37 斜距归算的近似关系

如图 5-37 所示,显见

$$S = R_A\sigma \tag{5-61}$$

σ 由余弦定理给出

$$D^2 = (R_A + H_1)^2 + (R_A + H_2)^2 - 2(R_A + H_1)(R_A + H_2)\cos\sigma \tag{5-62}$$

应用上两式,即可编程完成斜距归算。还可对上两式作进一步的改化。

顾及 $\cos\sigma = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma}{2}$，式(5-62)变为

$$D^2 = (H_2 - H_1)^2 + 4R_A^2\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)\sin^2\frac{\sigma}{2}$$

以弦长 $d = 2R_A\sin\frac{\sigma}{2}$ 及 $\Delta H = H_2 - H_1$ 代入，得

$$D^2 = \Delta H^2 + \left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)d^2$$

于是

$$S = R_A\sigma = 2R_A\sin^{-1}\frac{d}{2R_A}$$

将上式反正弦函数按泰勒级数展开后，整理得

$$S = d + \frac{d^3}{24R_A{}^2} \tag{5-63}$$

式中，$d = \sqrt{\dfrac{D^2 - \Delta H^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)}} = R_A \cdot \sqrt{\dfrac{D^2 - \Delta H^2}{(R_A + H_1)(R_A + H_2)}}$。

实用中采用精密的归算公式，其形式为

$$S = \frac{D'R_A}{R_A + H_m} + \frac{D^3}{24R_A^2} + 1.25 \times 10^{-16} H_m D^2 \sin 2B\cos A \tag{5-64}$$

式中，$D' = \sqrt{D^2 - (H_2 - H_1)^2}$；$H_m = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$；$N = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2\cos^2 B}}$；$R_A = \frac{N}{1 + e'^2\cos^2 B\cos^2 A}$。

其中，D 为已知斜距，取至 0.001 m；H_1、H_2 为测距边两端的大地高，取至 0.001 m；B 为测距边起点的大地纬度，取至整分；A 为测距边的大地方位角，取至整分；S 为斜距归算至椭球面的大地线长，取至 0.001 m。

计算实例见表 5-8(采用 1954 北京坐标系)。

表 5-8　斜距归算之计算

元素	实例 1	实例 2
D	5 432.321 m	9 876.543 m
H_1	826.93 m	4 254.23 m
H_2	837.65 m	4 876.47 m
B	36°42′	32°12′
A	63°47′	120°24′
S	5 431.597 m	9 849.871 m

五、垂线偏差公式(天文经纬度与大地经纬度的关系)

垂线偏差 ξ、η 是地面观测元素归算至椭球面的必需量。根据天文经纬度的定义，λ、φ 确定了所论点的垂线方向，而 L、B 确定了该点的法线方向，因而通过 λ、φ、L、B，便可确定 ξ、η。

已知法线与赤道面的交角是大地纬度 B，故法线与椭球短轴的夹角为 $90° - B$，即在

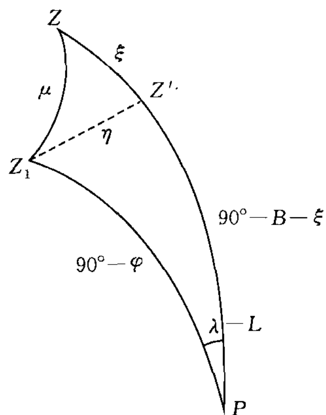


图 5-38 垂线偏差公式的推导

图 5-31 中，$PZ=90°-B$。同理，$PZ_1=90°-\varphi$。PZ 为大地子午面，PZ_1 为天文子午面，因而两面的夹角为 $\lambda-L$。又知 $PZ'=90°-B-\xi$。以上各量如图 5-38 所示。

这里有两个前提条件：

(1)椭球短轴与地球自转轴平行，这样两轴平移至图 5-31 的 A 点才会与辅助球交出一个 P 点；

(2)起始大地子午面与起始天文子午面平行，这样辅助球上大地子午面与天文子午面的夹角才为 $\lambda-L$。

在图 5-38 中，解球面三角形 $Z_1Z'P$，按纳白尔规则有

$$\cos(\lambda-L)=\tan(90°-B-\xi)\tan\varphi$$

$$\sin\eta=\sin(\lambda-L)\cos\varphi$$

式中，$(\lambda-L)$ 和 η 都是小量，取 $\sin(\lambda-L)=\lambda-L$，$\cos(\lambda-L)=1$，$\sin\eta=\eta$，代入上式，得

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\varphi-B\\ \eta&=(\lambda-L)\cos\varphi\end{aligned}\right\}\tag{5-65}$$

上式即为垂线偏差公式。

如果已知某点的天文经纬度和大地经纬度，就可算得该点的垂线偏差 ξ、η，因为这种垂线偏差是通过天文坐标和大地坐标求得的，所以也叫做天文大地垂线偏差。

我国一等三角锁(导线)布成的天文大地网中，每隔一定距离要测定天文经度和纬度，目的就在于计算垂线偏差，以满足观测方向的归算以及其他应用的需要。垂线偏差也可用重力测量资料求得，叫重力垂线偏差(也叫绝对垂线偏差)，它是相对于正常椭球的，而天文大地垂线偏差(也叫相对垂线偏差)是相对于参考椭球的。现代大地测量中的参考椭球采用地心定位，已与正常椭球一致，故不再有绝对垂线偏差和相对垂线偏差之分。

我们知道进行观测方向归算时，需要每个大地点的垂线偏差值，实际上又不可能在每个大地点上都进行天文测量，为此可采取下述方法解决：当没有重力测量资料时，就根据一部分已知垂线偏差的点，进行线性内插。当然这不符合客观实际，山区、大山区垂线偏差会有较大的非线性变化，即使在平原地区也会由于地球内部物质分布不均匀而存在非线性变化的情况。因此线性内插得到的数值是不精确的，甚至可能有较大的差异。要提高天文大地垂线偏差的精度必须应用重力数据。应用重力测量数据可以求得重力垂线偏差，重力垂线偏差可以转换为天文大地垂线偏差。因此，确定地面点的垂线偏差要综合天文、大地和重力测量资料共同解决。

与高程异常格网模型(§4-4)类似，可以建立某区域的垂线偏差格网模型，包括垂线偏差子午分量格网模型和垂线偏差卯酉分量格网模型。垂线偏差格网模型是一定范围内垂线偏差分量的离散化数字表达，是该范围内所有等间距格网点垂线偏差分量计算值的集合，在数据库中以格网数据结构的形式存储。

由式(5-65)可以得到

$$\left.\begin{aligned}B&=\varphi-\xi\\ L&=\lambda-\eta\sec\varphi\end{aligned}\right\}\tag{5-66}$$

这就是天文经纬度与大地经纬度的关系式。从公式形式看，理论上如果已知某点的天文经纬度以及该点的垂线偏差值，就可算得大地经纬度。但这样算得的 L、B 精度是很低的，实

用中并不采用。我们作如下分析：天文经度的观测中误差为 $m_\lambda=\pm 0.02\ \text{s}=\pm 0.3''$，$m_\varphi=\pm 0.3''$，相当于地面距离为±9 m，点位中误差为 $\pm 9\ \text{m}\times\sqrt{2}=\pm 12.6\ \text{m}$。用重力测量资料把垂线偏差改正到±1″以内，点位中误差为 $\pm 1''\times\sqrt{2}=\pm 1.4''$，相当于±42 m 的距离。综合这两项影响为±44 m。

六、天文方位角归算为大地方位角（拉普拉斯方位角公式）

天文测量的用途之一是确定大地方位角，以确定控制网的定向，控制方位误差的积累。因此要把测得的天文方位角归算为大地方位角。

由图 5-31 知，AM 方向的天文方位角为

$$\alpha=\theta_1+R_1$$

AM 方向的大地方位角为

$$A=\theta+R$$

两式相减

$$\alpha-A=(\theta_1-\theta)+(R_1-R)$$

式中，R_1-R 是观测方向的垂线偏差改正，即式(5-55)。

为获得 $\theta_1-\theta$ 的算式，在图 5-31 的球面直角三角形 $P\theta\theta_1$ 中，应用球面直角三角形的纳白尔规则，有

$$\sin\varphi=\tan(\theta_1-\theta)\tan[90^\circ-(\lambda-L)]=(\theta_1-\theta)\cot(\lambda-L)$$

故

$$\theta_1-\theta=(\lambda-L)\sin\varphi$$

于是

$$A=\alpha-(\lambda-L)\sin\varphi-(\xi\sin A-\eta\cos A)\cot z_1$$

上式右边最后一项，即垂线偏差改正项，其数值一般仅有百分之几秒或更小，而在一等天文测量中，天文方位角的观测中误差为±0.5″，因此垂线偏差的影响远远小于天文方位角的观测误差，完全可以忽略不计，故有

$$A=\alpha-(\lambda-L)\sin\varphi \tag{5-67}$$

顾及式(5-65)，上式可写成

$$A=\alpha-\eta\tan\varphi \tag{5-68}$$

式(5-67)或式(5-68)即是天文方位角的归算公式，称为拉普拉斯方位角公式，有的书上也称之为拉普拉斯方程式，为避免与式(4-15)重名，本书不采用此称谓。由上式归算的大地方位角叫做拉普拉斯方位角，也叫起始大地方位角。

式(5-67)应用误差传播定理，有

$$m_A^2=m_\alpha^2+\sin^2\varphi\cdot m_\lambda^2+\sin^2\varphi\cdot m_L^2+\left(\frac{\lambda-L}{\rho}\right)^2\cdot\cos^2\varphi\cdot m_\varphi^2$$

上式后两项为小量，舍去得

$$m_A^2=m_\alpha^2+\sin^2\varphi\cdot m_\lambda^2$$

取 $\varphi=30^\circ$，以 $m_\alpha=\pm 0.5''$，$m_\lambda=\pm 0.3''$代入上式，得：$m_A=\pm 0.6''$，即拉普拉斯方位角的精度约为±0.6″。

大地控制网中各点的大地方位角是通过逐点推算得到的，它受角度测量误差的积累影响，

例如，单三角锁经过16条边传算，每条边的方向误差为±0.5″，则最后一条边的方位误差为$\pm 0.5'' \sqrt{16} = \pm 2.0''$。拉普拉斯方位角的中误差约为±0.6″，显然比推算的方位角精度要高。

因此，在经典大地控制网中，每隔一定距离进行天文测量，计算拉普拉斯方位角，可用以控制大地网方位误差的积累。

§5-6 大地坐标系与大地极坐标系的关系

一、大地极坐标系与大地问题解算的概念

大地极坐标系是建立在椭球面上的极坐标系。椭球面上某点的位置，用极点至该点的大地线长S和大地方位角A表示。如图5-39所示，以椭球面上某一已知点P_1为极点，以过P_1点的子午线P_1N为极轴，以连接P_1和所求点P的大地线长S为极径，以大地线在P_1的大地方位角A为极角，则椭球面上P点的位置用(S,A)表示。

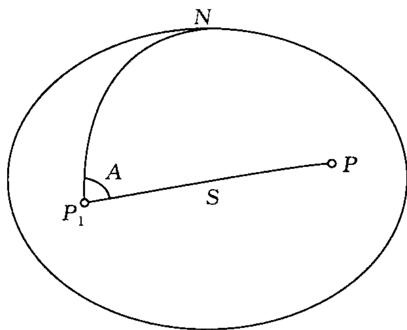


图5-39 大地极坐标系

大地极坐标系是表示椭球面上两点间相对水平位置的坐标系，常应用于远程武器发射、航海等需解算相对位置的场合。

根据大地测量获得的角度和长度的观测成果，由已知点计算未知点在椭球面上的大地坐标；或者根据两点的大地坐标，计算它们之间的大地线长和大地方位角，这类大地坐标与大地极坐标的计算称为大地问题解算，又叫大地主题解算、大地坐标计算或大地位置计算。大地问题解算，包括大地问题正解和大地问题反解。

如图5-40所示，已知P_1点大地坐标(L_1, B_1)，P_1点至P_2点的大地线长S和大地方位角A_1，计算P_2点的大地坐标(L_2, B_2)和大地线在P_2点的大地反方位角A_2，称大地问题正解；已知P_1和P_2两点的大地坐标(L_1, B_1)和(L_2, B_2)，反算P_1P_2的大地线长S和大地正反方位角A_1、A_2，称大地问题反解。由大地极坐标的定义知，(S, A_1)、(S, A_2)分别是P_2、P_1点的大地极坐标，因此大地问题解算就是大地坐标和大地极坐标的互相换算问题。

大地问题解算的用途是多方面的，除了天文大地测量本身需要在椭球面上推算大地坐标（见图5-29）外，随着现代空间技术和航空、航海等领域的发展，大地问题解算（尤其是反算）更有重要的作用。鉴于各种用途和要求的不同，产生了不同大地问题解算的方法和公式。

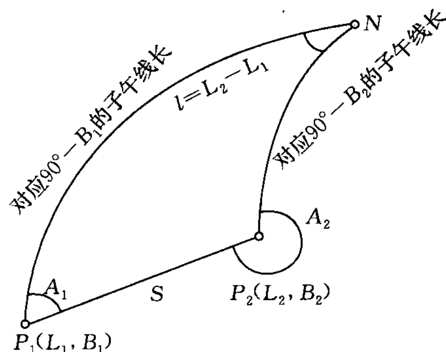


图5-40 大地问题解算

椭球面上大地坐标的解算，比平面上坐标的解算要复杂得多，这是因为椭球面的数学性质比平面要复杂得多的缘故。正是由于这种复杂性，导致了大地问题解算公式的多样化，其种类目前有几十种。若按解算的距离来分类，一般可分为短距离（400 km以内），中距离（400～1 600 km）和长距离（1 000～20 000 km）；若按解

算精度来分类，又可分为精密公式和近似公式。

大地问题解算的公式，尽管它们形式多样，推导方法各有不同，但从原理来说大都是以大地线的三个微分方程为基础的，对于长距离大地问题解算，还要用到大地线的克莱罗方程。若按解算的途径分类，解算公式基本可以归结为以下两大类：

(1)利用椭球面上大地线及其3个微分方程为基础，将大地线两端点的大地经差l、大地纬差b和大地方位角差a展开为大地线长度S的升幂级数式。这类公式的特点在于：解算精度与距离有关，距离越长，收敛越慢，甚至不收敛而不能解。因此，这类方法适用于短距离。

(2)利用球面作辅助面，将椭球面上的元素转换到球面上，在球面上应用球面三角公式进行解算，而后再把解算的结果转换回椭球面上。由于椭球面和球面之间只相差一个很小的扁率，所以椭球面和球面相应诸元素中一些转换关系式仅包含微小量e^2或e'^2的升幂级数式。本节研究的贝塞尔公式是这种类型公式的代表。这类公式不受距离限制，适用于任意距离的大地问题解算。

大地问题解算精度的要求取决于不同问题的实际。以天文大地网平差为例。已知一等锁边长相对中误差约为$\frac{m_s}{S}=1:20$万；方位角精度约为$m_A=\pm1.0''$，即$\frac{m_A}{\rho}\approx1:20$万。设$S=20\text{ km}$，取坐标分量与纵横向误差相同，即

$$m_X=m_Y=\pm0.1\text{ m}$$

顾及到一等锁系平差后，点位精度还能稍有提高，取$m_X=m_Y=\pm0.09\text{ m}$。若用大地坐标表示，当$B=45°$时，则得

$$m_B=\frac{m_x}{M}\rho''=\pm0.003''$$

$$m_L=\frac{m_y}{N\cos B}\rho''=\pm0.004''$$

在确定解算公式的精度要求时，一般应遵循下述原则：保证由公式引起的计算误差，不再影响野外测量和平差结果的实际精度。按这个原则，加之考虑到沿一等三角锁逐点推算大地坐标时可能产生的误差积累，故要求大地经、纬度应计算到0.000 1″。

在一等三角测量中，方位角最后结果取至0.01″，因此在大地问题解算中，大地方位角计算至0.001″。

以上讨论的计算精度是针对天文大地网平差和推求一等大地点坐标的，至于其他方面的需要，其计算精度要根据其用途和实际情况来决定。例如，对于导航应用来说，大地经、纬度和大地方位角只要计算到0.1″，解算距离精度至10 m即可。

作为对大地问题解算原理的理解，我们先介绍大地问题正算的逐点积累法。

将图5-40的P_1、P_2点间分成n个小区间。每个小区间两端点的经差、纬差和方位角差为$\mathrm{d}L$、$\mathrm{d}B$、$\mathrm{d}A$，满足大地线微分方程，于是有

$$\left.\begin{aligned}
L_2-L_1&=\int_{L_1}^{L_2}\mathrm{d}L=\int_0^S\frac{\sin A}{N}\sec B\mathrm{d}S\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin A_i}{N_i}\sec B_i\Delta S_i\\
B_2-B_1&=\int_{B_1}^{B_2}\mathrm{d}B=\int_0^S\frac{\cos A}{M}\mathrm{d}S\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos A_i}{M_i}\Delta S_i\\
A_2-A_1\pm180&=\int_{A_1}^{A_2\pm180}\mathrm{d}A=\int_0^S\frac{\sin A}{N}\tan B\mathrm{d}S\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin A_i}{N_i}\tan B_i\Delta S_i
\end{aligned}\right\}\tag{5-69}$$

对于短距离大地问题解算，上式通过一段一段循环计算可以完成正算，且可以达到较高的精度。显然上式中 n 越大精度越高。

二、大地问题解算的级数展开法

如图 5-40 所示，在已知点 $P_1(L_1, B_1)$ 处，大地线方位角 A_1 确定后，则大地线上任意点的大地经度、大地纬度和大地方位角是大地线长度 S 的函数，即

$$L = L(S), B = B(S), A = A(S)$$

显然，以上函数是连续可导的。将上式在 P_1 处按马克劳林级数展开，得

$$\begin{aligned} l = L_2 - L_1 &= \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_1 S + \left(\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}S^2}\right)_1 \frac{S^2}{2} + \left(\frac{\mathrm{d}^3 L}{\mathrm{d}S^3}\right)_1 \frac{S^3}{6} + \cdots \\ b = B_2 - B_1 &= \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}\right)_1 S + \left(\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}S^2}\right)_1 \frac{S^2}{2} + \left(\frac{\mathrm{d}^3 B}{\mathrm{d}S^3}\right)_1 \frac{S^3}{6} + \cdots \\ a = A_2 \mp 180^\circ - A_1 &= \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S}\right)_1 S + \left(\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}S^2}\right)_1 \frac{S^2}{2} + \left(\frac{\mathrm{d}^3 A}{\mathrm{d}S^3}\right)_1 \frac{S^3}{6} + \cdots \end{aligned} \tag{5-70}$$

式中，下标“1”表示各阶导数取 $S=0$（即在 P_1 点上的值，$B = B_1, A = A_1$）时的值。可见，推求 l, b, a 的展开式，关键在于求出式中各阶导数。其中 3 个一阶导数就是大地线微分方程，顾及 $N = \frac{c}{V}, M = \frac{c}{V^3}$，可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S} &= \frac{V}{c}\sec B \sin A \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S} &= \frac{V^3}{c}\cos A \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S} &= \frac{V}{c}\tan B \sin A \end{aligned}$$

对上式连续求导，可得式(5-70) 的各阶导数，于是就得到了经差 l、纬差 b、方位角差 a 展为大地线长 S 的幂级数，通常称为勒让德级数。

勒让德级数收敛缓慢，但如果不在大地线的端点 P_1，而在大地线的中点 $P_{S/2}$ 将 l, b, a 展为 S 的幂级数，则将会明显加快收敛速度。

将大地经差在 $P_{S/2}$ 处按泰勒级数展开，有

$$\begin{aligned} L_2 - L_{S/2} = &\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_{S/2}\left(\frac{S}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}S^2}\right)_{S/2}\left(\frac{S}{2}\right)^2 + \\ &\frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3 L}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S/2}\left(\frac{S}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^4 L}{\mathrm{d}S^4}\right)_{S/2}\left(\frac{S}{2}\right)^4 + \cdots \\ L_1 - L_{S/2} = &\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_{S/2}\left(-\frac{S}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}S^2}\right)_{S/2}\left(-\frac{S}{2}\right)^2 + \\ &\frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3 L}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S/2}\left(-\frac{S}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^4 L}{\mathrm{d}S^4}\right)_{S/2}\left(-\frac{S}{2}\right)^4 + \cdots \end{aligned}$$

上两式相减，得

$$l = L_2 - L_1 = \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_{S/2} S + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^3 L}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S/2} S^3 + \cdots$$

同理可得大地纬差和大地方位角差的公式，将它们与上式合并后列于下

$$
\begin{aligned}
l &= L_2 - L_1 = \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_{S/2} S + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^3 L}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S/2} S^3 + \cdots \\
b &= B_2 - B_1 = \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}\right)_{S/2} S + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^3 B}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S/2} S^3 + \cdots \\
a &= A_2 - A_1 \mp 180^\circ = \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S}\right)_{S/2} S + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^3 A}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S/2} S^3 + \cdots
\end{aligned}
\tag{5-71}
$$

式中，下标“$S/2$”表示括号内的各阶导数按大地线的中点 $P_{S/2}$ 处的大地纬度 $B_{S/2}$ 和大地方位角 $A_{S/2}$ 计算。式(5-71)虽然只列出两项，但实际上却有 S^4 项的精度，和勒让德级数相比其收敛较快。可以看出，式(5-71)中的大地纬度 $B_{S/2}$ 和大地方位角 $A_{S/2}$ 实际上是未知的，故并不能直接对该式解算，而需要对该式的导数加以改化。

设

$$
\left.
\begin{aligned}
B_m &= \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \\
A_m &= \frac{1}{2}(A_1 + A_2 \mp 180^\circ)
\end{aligned}
\right\}
$$

显然，$B_m \neq B_{S/2}$，$A_m \neq A_{S/2}$，但由于椭球扁率很小，它们间的差异不大，可以导出 $B_m - B_{S/2}$，$A_m - A_{S/2}$ 的估算式，从而将以 $B_{S/2}$，$A_{S/2}$ 为依据的导数，改化成以 B_m，A_m 为依据的导数，具体公式不再推导。由于正解时 B_2 和 A_2 为未知，因此 B_m 和 A_m 的精确值也为未知，须通过逐次趋近的方法求得。

式(5-71)是大地问题正解公式，据此还可推出相应的大地问题反解公式。这些公式是对勒让德级数的改进，适合于短距离大地问题的解算，称为高斯平均引数公式。

三、贝塞尔大地问题解算公式

(一)基本思路

大地问题解算的级数展开式是将大地经差、纬差和方位角差表示为大地线长 S 的函数，显然在一定精度要求下，距离越长，公式的结构就越复杂，甚至不可求解，因此这种公式不适于解长距离大地问题。

由球面三角学知道，球面三角公式都是用角度的三角函数表示的，球面距离的大小对于解算球面三角形的精度并无关系。又因地球椭球的扁率很小，若将其上的诸元素(经度、纬度、边长及方位角)化为球面上的对应球面元素并均用角度表示时，其对应的用角度表示的改正数一定是不大的，而且也和距离无关。因此，解算长距离大地问题的一般方法是通过球面过渡，就是按一定的投影条件，建立椭球面上元素和球面上对应元素间的投影关系，在球面上用球面三角公式建立各元素间的精确关系，再将解出的球面元素表示为椭球面元素。

可见，问题的关键是建立椭球面元素与球面元素间的对应关系。如图 5-40 所示，椭球面与球面的对应元素应包括以下 6 个：B_1，B_2，A_1，A_2，l，S。

(二)归化纬度

椭球面上元素化为球面上对应元素时，随着投影条件的选择不同或推求投影公式的积分方法不同，会得出不同的长距离大地问题解算公式。本节讨论其代表公式，即 1825 年贝塞尔提出的一种长距离大地问题解算公式。首先介绍归化纬度以及它同大地纬度间的变换关系。

如图(5-41)所示，$NPSN$ 表示一子午圈椭圆。今以椭圆中心 O 为中心，以赤道半径 a 为半

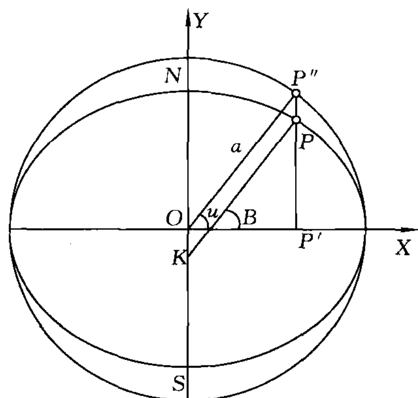


图 5-41 归化纬度

径，作一辅助圆。延长 P 点的纵坐标线 $P'P$，与圆相交于 P''，连接 $P''O$，则 $\angle P''OP'$ 叫做 P 点的归化纬度，以符号 u 表示。

显然，子午线椭圆上任意一点 P 均有一归化纬度 u 与之对应。下面推导归化纬度与大地纬度间的变换关系式。

在图 5-41 中建立平面直角坐标系 XOY，则 P 点坐标为

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{a}{W}\cos B \\ Y &= \frac{a}{W}(1-e^2)\sin B = \frac{b}{W}\sqrt{1-e^2}\sin B \end{aligned}\right\} \tag{5-72}$$

又由图 5-41 可知 $X = a\cos u$，将 X 代入椭圆方程式$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可求得 Y，于是有

$$\left.\begin{aligned} X &= a\cos u \\ Y &= b\sin u \end{aligned}\right\} \tag{5-73}$$

比较式(5-72)和式(5-73)，得

$$\left.\begin{aligned} \cos u &= \frac{1}{W}\cos B \\ \sin u &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{W}\sin B \end{aligned}\right\} \tag{5-74}$$

引入 $W = V\sqrt{1-e^2}$，有

$$\left.\begin{aligned} \cos u &= \frac{1}{V\sqrt{1-e^2}}\cos B \\ \sin u &= \frac{1}{V}\sin B \end{aligned}\right\} \tag{5-75}$$

式(5-74)或式(5-75)中的两式相除得

$$\tan u = \sqrt{1-e^2}\tan B \tag{5-76}$$

式(5-76)是归化纬度 u 与大地纬度 B 间的换算公式。由式(5-76) 可知，同一点的归化纬度 u 与大地纬度 B 有确定的对应关系。在一般情况下，大地纬度大于归化纬度。

对式(5-76)求导数，得 u 与 B 间的微分关系式为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\cos^2 B}\mathrm{d}B$$

顾及式(5-75)，得

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u} = V^2\sqrt{1-e^2} \tag{5-77}$$

(三)贝塞尔大地问题解算的基本原理

贝塞尔大地问题解算公式是首先建立起以椭球中心为球心，以任意长(讨论球面三角问题与半径大小无关)为半径的辅助球，按以下 3 个步骤解算：

(1)按一定条件将椭球面元素投影到球面上；

(2)在球面上解算大地问题；

(3)将求得的球面元素按投影关系换算为相应的椭球面元素。

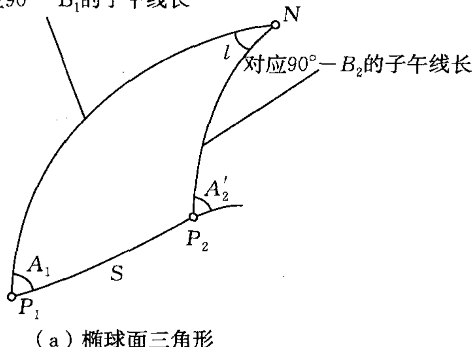
贝塞尔大地问题解算的 3 个投影条件是：

(1)使投影后球面上点的球面纬度等于椭球面上对应点的归化纬度；

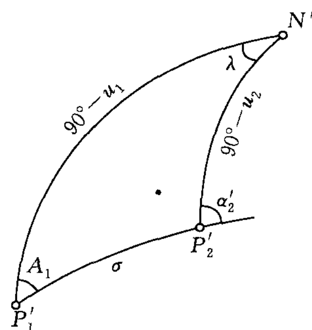
(2)椭球面上两点间的大地线投影到辅助球面上为大圆弧；

(3)大地方位角 A_1 投影后数值不变。

如图 5-42 所示，当选定辅助球和按上述三个条件投影后，在椭球面上有一大地极三角形 NP_1P_2，在球面上则对应有一确定的极三角形 $N'P_1'P_2'$，其中 $N'P_1' = 90° - u_1$，$N'P_2' = 90° - u_2$，σ 为大圆弧，$\angle N'P_1'P_2' = A_1$。设 P_1P_2 大地线在 P_2 的前进方位角为 A_2'，$P_1'P_2'$ 大圆弧在 P_2' 点的前进方位角为 α_2'，由球面三角形 $N'P_1'P_2'$，按正弦定理得



(a)椭球面三角形



(b)球面三角形

图 5-42　投影关系

$$\cos u_1 \sin A_1 = \cos u_2 \sin \alpha_2' \tag{5-78}$$

又根据大地线的克莱罗方程 $r\sin A = C$，及式(5-73)$r = x = a\cos u$，有

$$\cos u \sin A_1 = C$$

则

$$\cos u_1 \sin A_1 = \cos u_2 \sin A'_2 \tag{5-79}$$

比较式(5-78)和式(5-79)，则有

$$\alpha_2' = A_2' \tag{5-80}$$

上式表明，在贝塞尔大地问题解算中，方位角投影后保持不变。

至此，椭球面与球面两个面的对应 6 个元素中已有 4 个元素(u_1、u_2、A_1 和 A_2)确定了，剩下的是 λ 与 l、σ 与 S 的关系尚未确定。为此，根据大地线微分方程写出在椭球面和辅助球面上子午线弧素和平行圆弧素的表达式，它们是

椭球面上

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}S\cos A &= M\mathrm{d}B \\ \mathrm{d}S\sin A &= N\cos B\mathrm{d}l \end{aligned}\right\} \tag{5-81}$$

辅助球面上

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma\cos A &= \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}\sigma\sin A &= \cos u\mathrm{d}\lambda \end{aligned}\right\} \tag{5-82}$$

式中，$\mathrm{d}\sigma$ 以角度表示。

由上述两组公式可得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\sigma} = M \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\sigma} = N \frac{\cos B}{\cos u} \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}$$

顾及 $M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{a}{V^3\sqrt{1-e^2}}, N = \frac{a}{W}$，以及式(5-77)和式(5-74)，得

$$\mathrm{d}S = \frac{a}{V}\mathrm{d}\sigma \tag{5-83}$$

$$\mathrm{d}l = \frac{1}{V}\mathrm{d}\lambda \tag{5-84}$$

又

$$\cos u = \frac{1}{V\sqrt{1-e^2}}\cos B$$

故

$$V^2 = 1 + e'^2\cos^2 B = 1 + e'^2\cos^2 u\, V^2(1-e^2) = 1 + e^2 V^2 \cos^2 u$$

即

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}$$

代入式(5-83)和式(5-84)，得

$$\mathrm{d}S = a\sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}\sigma \tag{5-85}$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}\lambda \tag{5-86}$$

式(5-85)和式(5-86)为椭球面上边长、经差与辅助球面上相应边长、经差的微分方程式，称为贝塞尔微分方程。解这组微分方程，即可求得 S 与 σ、l 与 λ 的关系式。对它们采用不同的积分方法，就得到不同的公式，这是贝塞尔大地问题解算公式和其他不少长距离大地问题解算公式的区别点。

贝塞尔公式适用于任何距离，在于其积分不表现为边长或经、纬差的幂级数式，而表现为偏心率平方 e^2(或 e'^2) 的幂级数式。

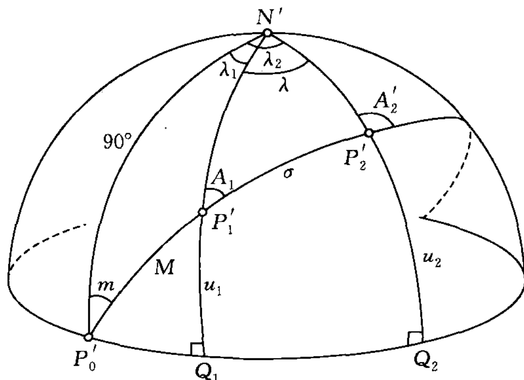


图 5-43 u 和 σ 的关系

(四)贝塞尔微分方程的解

1. S 与 σ 的关系式

对式(5-85)积分，即可求得 S 与 σ 的关系式。为了求解积分，首先将 u 化为 σ 的函数。如图 5-43 所示，延长大圆弧 $P_1'P_2'$ 与辅助球赤道交于 P_0'。设 $P_1'P_2'$ 在 P_0' 点的方位角为 m，而大圆弧 $P_0'P_1' = M$。显然，当 P_1' 点及大圆弧 $P_1'P_2'$ 固定时，m 和 M 的值也是固定的。显然，延长大圆弧 $P_1'P_2'$ 的目的就是可找到与球面四边形相关的球面三角形，以能应用球面三角公式解算。

设 $P_1'P_2'$ 弧上有一流动点 P'，如果 P' 变动，

则 P' 到 P_1' 的距离 σ 及 P' 的球面纬度 u 也都相应地产生变动，由此建立 u 与 σ 的关系式。

视 P_2' 为动点 P'，由球面直角三角形 $P_0'Q_2P_2'$ 得

$$\sin u = \cos m \sin(M+\sigma)$$

即

$$\cos^2 u = 1 - \cos^2 m \sin^2(M+\sigma) \tag{5-87}$$

将上式代入式(5-85)，得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= a\sqrt{1-e^2+e^2\cos^2 m\sin^2(M+\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma = \\ &a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2 m\sin^2(M+\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma = \\ &b\sqrt{1+e'^2\cos^2 m\sin^2(M+\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

或写成

$$\mathrm{d}S = b\sqrt{1+k^2\sin^2(M+\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma \tag{5-88}$$

式中，$k^2 = e'^2\cos^2 m$。

为了求出式(5-88)的积分，将被积函数展开为 σ 的级数式于下

$$\sqrt{1+k^2\sin^2(M+\sigma)} = 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2(M+\sigma)-\frac{1}{8}k^4\sin^4(M+\sigma)+\cdots$$

顾及

$$\sin^2(M+\sigma) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(M+\sigma)$$

$$\sin^4(M+\sigma) = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2(M+\sigma)+\frac{1}{8}\cos 4(M+\sigma)$$

$$\vdots$$

得

$$\begin{aligned} \sqrt{1+k^2\sin^2(M+\sigma)} = &\left(1+\frac{k^2}{4}-\frac{3}{64}k^4+\cdots\right)+\left(-\frac{k^2}{4}+\frac{k^4}{16}+\cdots\right)\cdot \\ &\cos 2(M+\sigma)-\frac{k^4}{64}\cos 4(M+\sigma)+\cdots \end{aligned}$$

将上式代入式(5-88)积分，顾及

$$\int_0^\sigma \cos 2(M+\sigma)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}[\sin 2(M+\sigma)-\sin 2M] = \sin\sigma\cos(2M+\sigma)$$

$$\int_0^\sigma \cos 4(M+\sigma)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma)$$

$$\vdots$$

得

$$S = b\left[\left(1+\frac{k^2}{4}-\frac{3}{64}k^4\right)\sigma-\left(\frac{k^2}{4}-\frac{k^4}{16}\right)\sin\sigma\cos(2M+\sigma)-\frac{k^4}{128}\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma)\right]$$

或

$$S = b[A\sigma - B\sin\sigma\cos(2M+\sigma) - C\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma)] \tag{5-89}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} A &= 1+\frac{k^2}{4}-\frac{3}{64}k^4 \\ B &= \frac{k^2}{4}-\frac{k^4}{16} \\ C &= \frac{k^4}{128} \end{aligned}\right\}$$

由式(5-89)还可得出由 S 求 σ 的关系式

$$\sigma'' = \alpha S + \beta\sin\sigma\cos(2M+\sigma) + \gamma\sin2\sigma\cos(4M+2\sigma) \tag{5-90}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho''}{bA} = \frac{\rho''}{b}\left(1-\frac{k^2}{4}+\frac{7k^4}{64}\right) \\ \beta &= \frac{B\rho''}{A} = \rho''\left(\frac{k^2}{4}-\frac{k^4}{8}\right) \\ \gamma &= \frac{C\rho''}{A} = \rho''\left(\frac{k^4}{128}\right) \end{aligned}\right\}$$

至于 k 中的 m 和式(5-89)、式(5-90) 中的 M,可由直角三角形 $P_0'Q_1\ P_1'$ 按下式确定

$$\left.\begin{aligned} \tan M &= \frac{\tan u_1}{\cos A_1} \\ \tan m &= \tan A_1 \cos M \\ \sin m &= \cos u_1 \sin A_1 \end{aligned}\right\} \tag{5-91}$$

2. l 与 λ 的关系式

积分式(5-86),即可求得 l 与 λ 的关系式。以上已将 u 化为 σ 的函数,因此若将 $\mathrm{d}\lambda$ 用 $\mathrm{d}\sigma$ 表示,即可解微分方程式(5-86)。

由式(5-82),得

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\sin A}{\cos u}\mathrm{d}\sigma$$

同样视 P_2' 为动点 P',由直角三角形 $P_0'Q_2P_2'$ 有

$$\sin A = \frac{\sin m}{\cos u}$$

因而得

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\sin m}{\cos^2 u}\mathrm{d}\sigma$$

将上式代入式(5-86)得

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\ \frac{\sin m}{\cos^2 u}\mathrm{d}\sigma$$

为了求出积分,将上式按 u 的级数展开得

$$\mathrm{d}l = \left(1-\frac{e^2}{2}\cos^2 u-\frac{e^4}{8}\cos^4 u+\cdots\right)\frac{\sin m}{\cos^2 u}\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\lambda - \sin m\left(\frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{8}\cos^2 u+\cdots\right)\mathrm{d}\sigma$$

将式(5-87)代入上式得

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}\lambda - \sin m\left[\frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{8}-\frac{e^4}{8}\cos^2 m\sin^2(M+\sigma)+\cdots\right]\mathrm{d}\sigma =$$

$$d\lambda - \sin m\left[\frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{8}-\frac{e^4}{16}\cos^2 m+\frac{e^4}{16}\cos^2 m\cos 2(M+\sigma)+\cdots\right]d\sigma$$

积分上式（取至 e^4 项）得

$$l = \lambda - \sin m\left[\left(\frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{8}-\frac{e^4}{16}\cos^2 m\right)\sigma+\frac{e^4}{16}\cos^2 m\sin\sigma\cos(2M+\sigma)\right]$$

或

$$l'' = \lambda'' - \sin m[\alpha'\sigma''+\beta'\sin\sigma\cos(2M+\sigma)] \tag{5-92}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= \left(\frac{1}{2}+\frac{e^2}{8}-\frac{k'^2}{16}\right)e^2\\ \beta' &= \frac{e^2}{16}k'^2\rho''\\ k'^2 &= e^2\cos^2 m\end{aligned}\right\}$$

式(5-89)或式(5-90)和式(5-92)就是贝塞尔大地问题解算中边长投影公式和经差投影公式。这些公式是按 e'^2 和 e^2 幂级数展开的，而不是按 S 展开的。解算的精度与展开项数有关，而与距离无关，它们适用于任意距离（特别是长距离）的大地问题解算。贝塞尔公式的主要缺点是：由 S 求 σ，由 l 求 λ，需要迭代计算；另外还要预先计算辅助量 m 和 M。

四、贝塞尔大地问题正解计算

（一）解算步骤

1. 将椭球面元素投影到球面上

1）由 B_1 求 u_1

$$\tan u_1 = \sqrt{1-e^2}\tan B_1 \tag{5-93}$$

2）计算辅助量 m 和 M

$$\left.\begin{aligned}\sin m &= \cos u_1\sin A_1\\ \tan M &= \frac{\tan u_1}{\cos A_1}\end{aligned}\right\} \tag{5-94}$$

3）将 S 化为 σ

$$\sigma = \alpha S+\beta\sin\sigma\cos(2M+\sigma)+\gamma\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma) \tag{5-95}$$

上式右端含有待求量 σ，为此需要进行迭代计算。

第 1 次近似值取

$$\sigma_0 = \alpha S$$

第 i 次取

$$\sigma_i = \alpha S+\beta\sin\sigma_{i-1}\cos(2M+\sigma_{i-1})+\gamma\sin 2\sigma_{i-1}\cos(4M+2\sigma_{i-1})$$

直到满足所要求的精度为止。例如，欲使 $\Delta S < 0.3$ m，则需 $|\sigma_i-\sigma_{i-1}| < 0.01''$（即 $2.8^\circ\times 10^{-6}$）；欲使 $\Delta S < 0.03$ m，则需 $|\sigma_i-\sigma_{i-1}| < 0.001''$（即 $2.8^\circ\times 10^{-7}$）。

精密解算时，α、β、γ 按下式计算

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\rho\sqrt{1+e'^2}}{a}\left(1-\frac{k^2}{4}+\frac{7k^4}{64}-\frac{15k^6}{256}\right)\\
\beta &= \rho\left(\frac{k^2}{4}-\frac{k^4}{8}+\frac{37k^6}{512}\right)\\
\gamma &= \rho\left(\frac{k^4}{128}-\frac{k^6}{128}\right)\\
k^2 &= e'^2\cos^2 m
\end{aligned}\right\}$$

米级近似解算时，上式取至 k^4 项；百米级近似解算时，还可舍弃 γ 项。

2. 解算球面三角形

1) 求 A_2

因 $A_2 = A'_2 + 180°$，由球面直角三角形 $P'_oQ_2P'_2$，得

$$\tan A_2 = \tan A'_2 = \frac{\tan m}{\cos(M+\sigma)} \tag{5-96}$$

2) 求 u_2

仍由球面直角三角形 $P'_oQ_2P'_2$，得

$$\tan u_2 = \cos A'_2 \tan(M+\sigma) = -\cos A_2 \tan(M+\sigma) \tag{5-97}$$

3) 求 λ

由球面直角三角形 $P'_oQ_1P'_1$ 和 $P'_oQ_2P'_2$，得

$$\left.\begin{aligned}
\tan\lambda_1 &= \sin m\tan M = \sin u_1 \tan A_1\\
\tan\lambda_2 &= \sin m\tan(M+\sigma) = \sin u_2 \tan A_2\\
\lambda &= \lambda_2 - \lambda_1
\end{aligned}\right\} \tag{5-98}$$

至此，所要的球面上 A_2、u_2 和 λ 三个未知元素均已求出。

3. 将球面元素换算到椭球面上

1) 由 u_2 求 B_2

$$\tan B_2 = \sqrt{1+e'^2}\tan u_2 \tag{5-99}$$

2) 将 λ 化为 l，求 L_2

$$l = \lambda - \sin m[\alpha'\sigma + \beta'\sin\sigma\cos(2M+\sigma) + \gamma'\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma)] \tag{5-100}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= \left(\frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{8}+\frac{e^6}{16}\right) - \frac{e^2}{16}(1+e^2)k'^2 + \frac{3}{128}e^2k'^4\\
\beta' &= \rho\left[\frac{e^2}{16}(1+e^2)k'^2 - \frac{e^2}{32}k'^4\right]\\
\gamma' &= \rho\frac{e^2}{256}k'^4\\
k'^2 &= e^2\cos^2 m
\end{aligned}\right\}$$

其中，γ' 最大值为 0.000 2″，故式(5-100)中 γ' 项通常可以略去。

米级近似解算时，α'、β' 可按式(5-92)给出的公式计算。百米级近似解算时，可按式(5-92)中舍去 k'^2 项进行计算，即此时 $\alpha' = \left(\frac{1}{2}+\frac{e^2}{8}\right)e^2$。

最后，得

$$L_2 = L_1 + l \tag{5-101}$$

(二)象限的判断

在计算中，m、M、λ_1、λ_2 和 A_2 都是通过三角函数求出的，因此还需要讨论它们的象限判断问题。

为了易于判断这些量的象限，特作图 5-44、图 5-45、图 5-46 和图 5-47。这些图表示，当P_1'点在北半球即 u_1 为正的情况下，A_1 分别为第 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 象限时，m、M、λ_1、λ_2 和 A_2 所在的象限。每个图中，P_2 点都设有三个位置，分别以 P_2'、P_2''、P_2'''表示，相应的 λ_2 分别在不同的三个象限。图中 P_0'、P_0'' 为大圆弧与赤道的交点，球的背面展过来用虚线表示。图 5-44 是 A_1 在第 Ⅰ 象限的情况。这时，m、M、λ_1 均在第 Ⅰ 象限。在 P_2'处，λ_2、A_2' 均在第 Ⅰ 象限；在 P_2''处，λ_2、A_2'均在第 Ⅱ 象限；在 P_2'''处，λ_2 在第 Ⅲ 象限，A_2' 在第 Ⅱ 象限。因为 $A_2 = A'_2 \pm 180°$，可见，A_2 在第 Ⅲ 或第 Ⅳ 象限。同理，可以理解图 5-45、图 5-46 和图 5-47 的情况。

图 5-44　A_1 在第 Ⅰ 象限：m、M、λ_1 均在第 Ⅰ 象限，λ_2 与$(M+\sigma)$ 同象限，A_2 在 Ⅳ 或 Ⅲ 象限

由图 5-44 可知，λ_2 与$(M+\sigma)$ 是同象限的。至于 A_2 的象限可根据 $\tan A_2$ 的符号决定：$\tan A_2$ 为正时，A_2 在第 Ⅲ 象限；为负时在第 Ⅳ 象限。上述结论也适用于A_1 在第 Ⅱ 象限的情况(见图 5-45)。

图 5-45　A_1 在第Ⅱ象限：m 在第Ⅰ象限，M、λ_1 在第Ⅱ象限，λ_2 与$(M+\sigma)$ 同象限，A_2 在 Ⅳ 或 Ⅲ 象限

但当 A_1 在第 Ⅲ、Ⅳ 象限(见图 5-46、图 5-47)时，λ_2 则与 $360°-(M+\sigma)$ 同象限。$\tan A_2$ 为正时，A_2 在第 Ⅰ 象限，为负时在第 Ⅱ 象限。

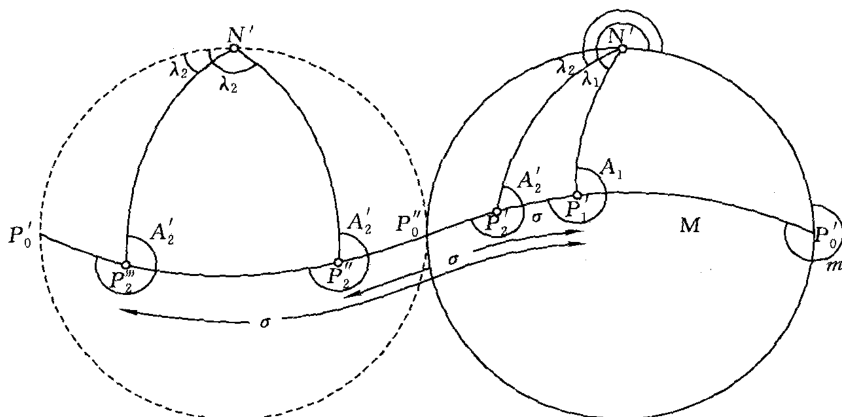


图 5-46 A_1 在第 Ⅲ 象限：m 在第 Ⅳ 象限，M 在第 Ⅱ 象限，λ_1 在第 Ⅲ 象限，λ_2 与 $360°-(M+\sigma)$ 同象限，A_2 在 Ⅰ 或 Ⅱ 象限

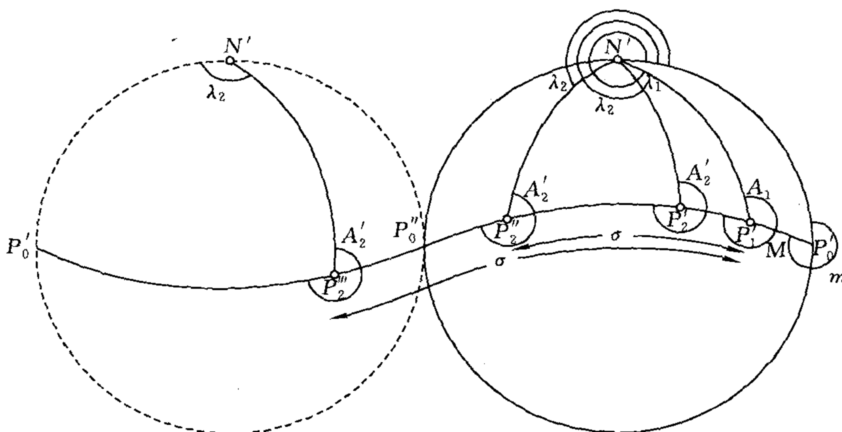


图 5-47 A_1 在第 Ⅳ 象限：m 在第 Ⅳ 象限，M 在第 Ⅰ 象限，λ_1 在第 Ⅳ 象限，λ_2 与 $360°-(M+\sigma)$ 同象限，A_2 在 Ⅱ 或 Ⅰ 象限

从以上 4 个图不难归纳出 u_1 为正（北半球）时，m、M、λ_1、λ_2 和 A_2 的象限表(见表 5-9)。

表 5-9 大地问题正算中的象限判断

A_1	m	M	λ_1	λ_2	A_2
Ⅰ	Ⅰ	Ⅰ	Ⅰ	与 $(M+\sigma)$ 同象限	$\tan A_2$ 为正，在Ⅲ象限 $\tan A_2$ 为负，在Ⅳ象限
Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅱ		
Ⅲ	Ⅳ	Ⅱ	Ⅲ	与 $360°-(M+\sigma)$ 同象限	$\tan A_2$ 为正，在Ⅰ象限 $\tan A_2$ 为负，在Ⅱ象限
Ⅳ	Ⅳ	Ⅰ	Ⅳ		

(三)计算示例

长距离大地问题解算，在导航和远程导弹发射中非常有用。这里给出米级近似解算的框图和算例，按公式同样可编制精密解算或百米级近似解算的框图。

1. 框图

大地问题正解框图见图 5-48。

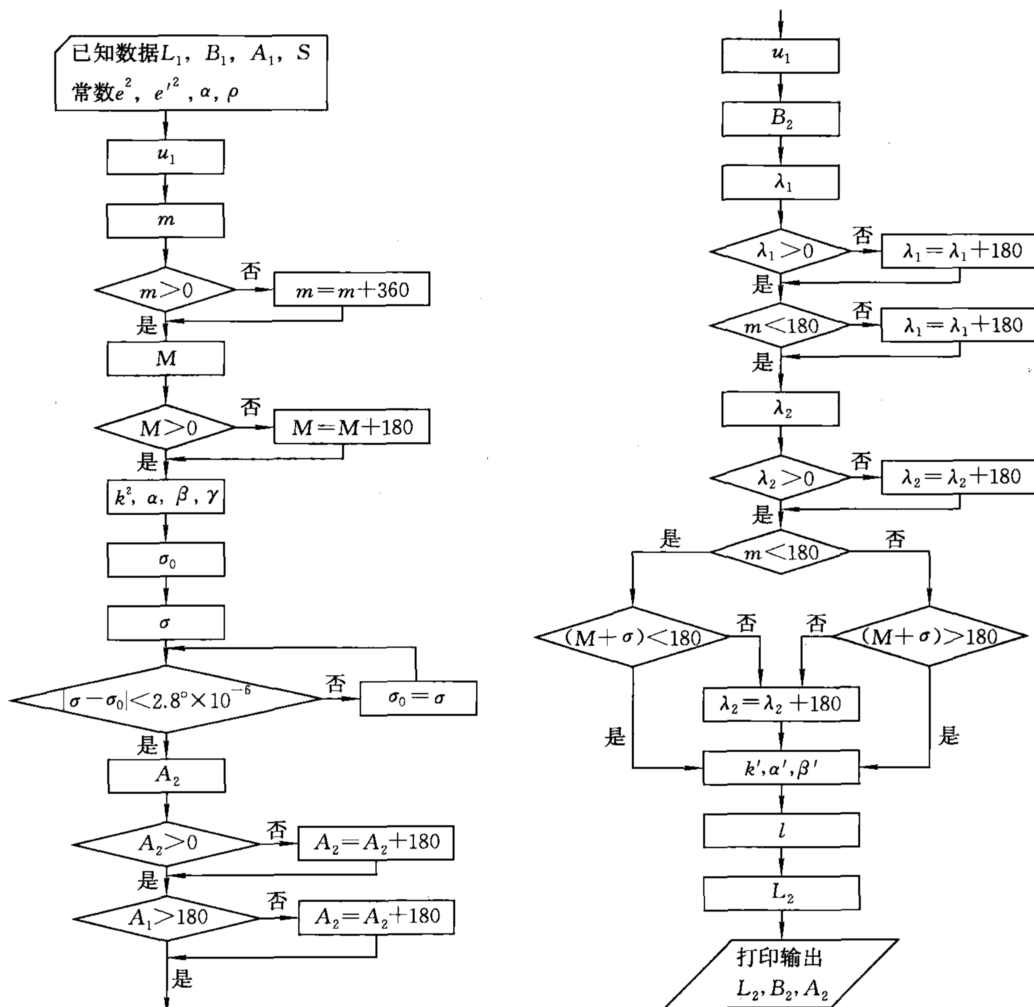


图 5-48　大地问题正解框图

2. 算例

大地问题正解计算算例见表 5-10。

表 5-10　大地问题正解计算算例

已知数据	椭球参数	运算结果
$L_1=90°00'00.11''$ $B_1=35°00'00.22''$ $A_1=100°00'00.33''$ $s=15\ 000\ 000.2$ m	克拉索夫斯基椭球	$L_2=215°59'04.332\ 964''$
		$B_2=-30°29'20.964\ 216''$
		$A_2=290°32'53.389\ 008''$
	IUGG 1975 椭球	$L_2=215°59'13.058\ 826''$
		$B_2=-30°29'23.867\ 116''$
		$A_2=290°32'48.832\ 674''$
	CGCS 2000 椭球	$L_2=215°59'13.306\ 260''$
		$B_2=-30°29'23.947\ 070''$
		$A_2=290°32'48.707\ 796''$

五、贝塞尔大地问题反解计算

(一)解算步骤

1. 将椭球面元素投影到球面上

1) 由 B 求 u

$$\left.\begin{aligned}\tan u_1 &= \sqrt{1-e^2}\tan B_1\\ \tan u_2 &= \sqrt{1-e^2}\tan B_2\end{aligned}\right\}\tag{5-102}$$

2) 由 l 求 λ

在反解中，已知椭球面上的经差 l，球面上对应的经差 λ 暂不知，为了由 l 求 λ，由式(5-92)知，需首先计算 σ、m 和 M。由于它们都是参与计算改正项的，要求的精度不高，一般趋近两次即可。

由图(5-45)中三角形 $P_1'P_2'N'$，按余弦定理可得(以 l 近似代替 λ，故算得的是 σ 的近似值 σ_0)

$$\cos\sigma_0 = \sin u_1\sin u_2 + \cos u_1\cos u_2\cos l\tag{5-103}$$

又由三角形 $P_0'P_1'Q_1$ 和 $P_1'N'P_2'$ 可得

$$\sin m_0 = \cos u_1\sin A_1 = \cos u_1\cos u_2\frac{\sin l}{\sin\sigma_0}\tag{5-104}$$

由此算出 m 的近似值 m_0。

顾及式(5-92)，取 λ 的近似改正数，得

$$\Delta\lambda = \lambda - l \approx \alpha'\sigma_0\sin m_0 = 0.003\,351\sigma_0\sin m_0\tag{5-105}$$

于是有

$$\lambda_0 = l + \Delta\lambda$$

取式(5-103)，对 σ、l 微分，得

$$-\sin\sigma_0\Delta\sigma = -\cos u_1\cos u_2\sin\lambda_0\Delta\lambda$$

即

$$\Delta\sigma = \cos u_1\cos u_2\frac{\sin\lambda_0}{\sin\sigma_0}\Delta\lambda = \sin m_0\Delta\lambda\tag{5-106}$$

于是有

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma$$

将 λ_0、σ_1 代入式(5-104)，可得

$$\sin m = \cos u_1\cos u_2\frac{\sin\lambda_0}{\sin\sigma_1}\tag{5-107}$$

另外，由三角形 $P_1'P_2'N'$ 按余切定理，以 λ_0 代 λ，有

$$\left.\begin{aligned}\cot A_1^{\circ} &= \tan u_2\cos u_1\csc\lambda_0 - \sin u_1\cot\lambda_0\\ \tan A_1^{\circ} &= \frac{\sin\lambda_0}{\cos u_1\tan u_2 - \sin u_1\cos\lambda_0}\end{aligned}\right\}\tag{5-108}$$

由此算出 A_1 的近似值 A_1°。

再由直角三角形 $P_0'P_1'Q_1'$，得

$$\left.\begin{aligned}\cot M &= \frac{\sin m\cot A_1^{\circ}}{\sin u_1}\\ \tan M &= \frac{\sin u_1}{\sin m}\tan A_1^{\circ}\end{aligned}\right\}\tag{5-109}$$

由此算出 M 的近似值。

依据式(5-107)求得 m,按式(5-100)给出的公式计算 α'、β',精度要求同正解一样。

最后,按下式计算球面经差

$$\lambda = l + \sin m[\alpha'\sigma + \beta'\sin\sigma\cos(2M+\sigma)] \tag{5-110}$$

2. 解算球面三角形

1)求 σ

由图 5-43 中球面三角形 $P_1'P_2'N'$,按余弦公式得

$$\cos\sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos\lambda \tag{5-111}$$

2)求 A_1、A_2

由图 5-43 中球面三角形 $P_1'P_2'N'$,按余切公式得

$$\left.\begin{aligned} \cot A_1 &= \tan u_2 \cos u_1 \csc\lambda - \sin u_1 \cot\lambda \\ \tan A_1 &= \frac{\sin\lambda}{\cos u_1 \tan u_2 - \sin u_1 \cos\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{5-112}$$

$$\left.\begin{aligned} \cot A_2 &= \sin u_2 \cot\lambda - \tan u_1 \cos u_2 \csc\lambda \\ \tan A_2 &= \frac{\sin\lambda}{\sin u_2 \cos\lambda - \tan u_1 \cos u_2} \end{aligned}\right\} \tag{5-113}$$

3. 将球面元素换算到椭球面上

(1)大地方位角 A_1、A_2 无须换算。

(2)将 σ 化为 S

$$S = \frac{1}{\alpha}[\sigma - \beta\sin\sigma\cos(2M+\sigma) - \gamma\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma)] \tag{5-114}$$

式中,α、β、γ 按精密解算公式计算,精度要求同正解一样。

(二)象限判断

在计算中,同样需要判断 A_1 和 A_2 的象限,可参考表 5-5 进行,不再赘述。

(三)计算示例

1. 框图

大地问题反解框图见图 5-49。

2. 算例

大地问题反解计算算例见表 5-11。

表 5-11 大地问题反解计算算例

已知数据	椭球参数	运算结果
$L_1 = 90°00'00.11''$ $B_1 = 35°00'00.22''$ $L_2 = 215°59'04.34''$ $B_2 = -30°29'20.96''$	克拉索夫斯基椭球	$S = 15\,000\,000.330\,151$ m
		$A_1 = 100°00'00.321\,383''$
		$A_2 = 290°32'53.391\,545''$
	IUGG 1975 椭球	$S = 14\,999\,751.047\,150$ m
		$A_1 = 100°00'00.228\,130''$
		$A_2 = 290°32'53.328\,635''$
	CGCS 2000 椭球	$S = 149\,997\,44.004\,057$ m
		$A_1 = 100°00'00.228\,612''$
		$A_2 = 290°32'53.328\,960''$

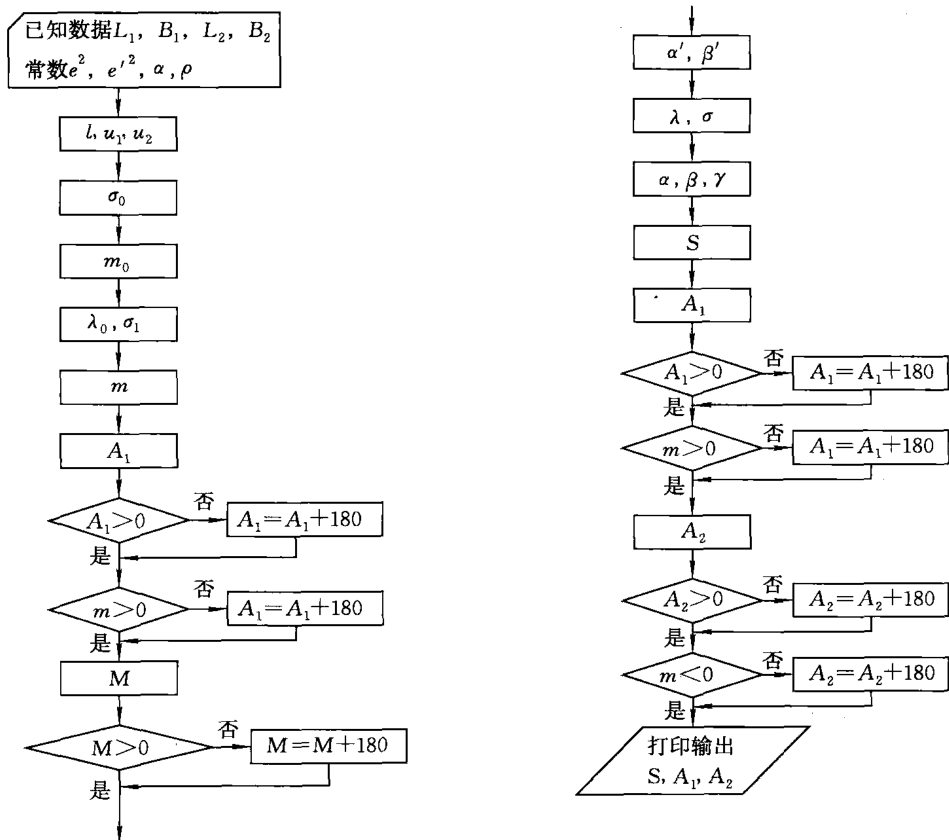


图 5-49 大地问题反解框图

第六章　高斯投影与高斯平面直角坐标系

由于椭球面上的大地坐标不能直接控制平面测图，也不能直接作为工程测量的控制，并且椭球面上的计算问题有时显得比较复杂。若能把椭球面元素通过一定方法归算到平面上，既能满足测图和工程测量的要求，又能使计算问题变得简便得多。因此，有必要进一步把椭球面上的元素化算到平面上，即所谓的投影。投影的方法很多，本章主要讨论我国采用的高斯投影。研究高斯投影的方法、模型，以及椭球面上大地坐标与高斯平面坐标的关系和坐标换算方法；研究如何把椭球面上的大地控制网投影到平面上，进而在高斯平面坐标系中进行大地控制网的计算。

§6-1　投影概述

一、投影的意义

参考椭球面是大地测量计算的基准面，以椭球面为基准的大地坐标系是大地测量的基本坐标系，对于大地问题解算、研究地球形状和大小，编制地图等都有广泛应用。大地测量的作用之一是测定地面点的坐标以控制地形测图。但从实用上来看，确有不便之处：第一，大地坐标不能直接用来控制测图。因为地图是平面的，它要求作为控制测图的大地点的坐标也必须是平面坐标，否则，一个是平面系统，一个是椭球面系统，自然起不到控制作用；第二，相对于平面，在椭球面上进行各类大地测量计算均相当复杂。尽管椭球面是数学曲面，但直接在椭球面进行各种测量计算，远远不如在平面上简便。为了控制地形测图和简化测量计算，有必要将椭球面上的元素归算到平面上。这种归算是通过投影的方法来实现的，因此必须进行椭球面至平面的投影。

投影在数学上的含义是建立两曲面间点的一一对应关系，即第一个曲面上的每一个确定的点，在第二个曲面上必有且仅有一个点与之对应。而地图投影则是建立椭球面与平面之间点与点的一一对应关系。在投影中，最形象的方法是透视法。

如图 6-1 所示，假设取一平面，使其与椭球的极点相切，该平面称为投影面。在椭球中心放置一灯光，光线透过椭球面上的点 P，投影到平面上得到点 P'，P' 就是 P 的投影点。这就是投影的初始概念。这种投影叫做透视投影，虽然直观简单，便于几何作图，但它并不实用。实际上大量的投影是通过数学解析方法实现的，即通过建立投影方程来确定具体的投影关系。

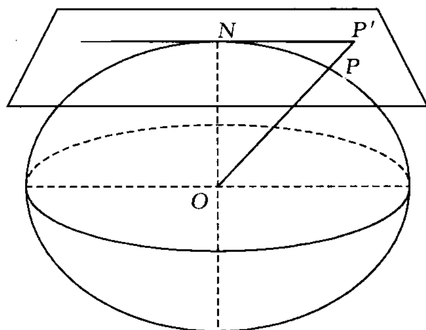


图 6-1　投影的几何解释

二、投影方程

在大地测量中，投影是指将椭球面上的元素，按照一定的数学规则归算到平面上。椭球面元素包括点的大地坐标、大地线的方向和长度以及大地方

位角等。其中确定点的坐标之间的投影关系是关键，因为点的位置确定后，两点间大地线的方位和距离自然就确定了。椭球面上点的大地坐标(B,L)与投影平面上点的直角坐标(x,y)间的对应关系，可用数学表达式表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(B,L) \\ y &= F_2(B,L) \end{aligned}\right\} \tag{6-1}$$

上式称为投影方程，即为投影的一般公式。F_1 和 F_2 称为投影函数，它们是由上面所说的"一定的数学规则"决定的。如果 F_1 和 F_2 的形式已经确定，即可由大地坐标求得平面直角坐标。

椭球面和球面都是不可展曲面，不能直接展成平面。如果取一可展曲面(如平面、圆锥面、圆柱面)，使其与椭球面相切或相割，然后按一定的数学规则，将椭球面上的元素转换到可展曲面上，并将可展曲面展平，就变成平面上的元素了。这样就将本来是不可展平的椭球面，人为地转变成平面。由此得到的平面元素必然要产生投影变形。投影变形包括长度变形、角度变形和面积变形等。在选取投影函数时，可以对它们适当控制：可使某种变形为零，其他变形保留；或使某种变形小些，其他变形大些；也可使各种变形并存，而均在适当限度以内。但是，无论选取何种投影函数，都不能使各种变形同时消失。换句话说，无论怎样投影，变形总是不可避免的。下面具体讨论投影变形。

三、投影变形

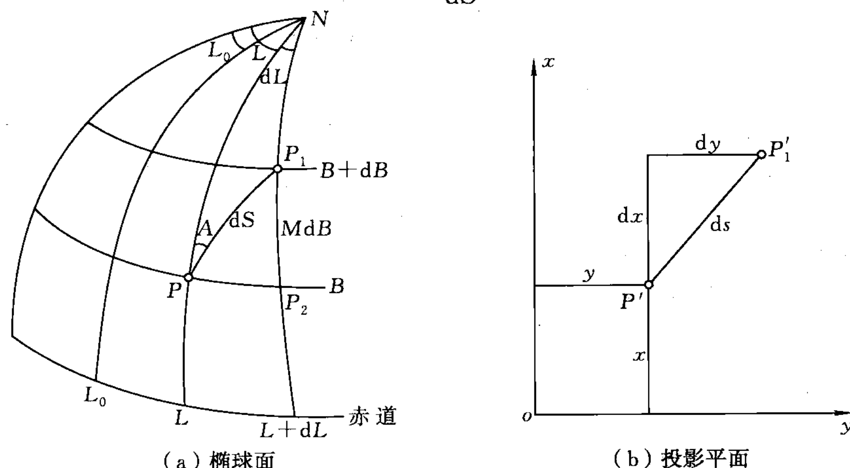
(一)长度比

为了研究投影的长度变形，首先要建立投影长度比的概念。如图 6-2 所示，设椭球面上一微小线段 PP_1，它在投影平面上的相应线段为 $P'P_1'$，当 PP_1 趋近于零时，比值 $P'P_1'/PP_1$ 的极限称为投影长度比，简称长度比，用 m 表示，即

$$m = \lim_{PP_1 \to 0}\left(\frac{P'P_1'}{PP_1}\right) \tag{6-2}$$

若 $\mathrm{d}S$ 表示椭球面上的一段无限小的微分弧素，$\mathrm{d}s$ 表示它在投影平面上投影后的相应微分弧素，则长度比 m 还可表示为

$$m = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}S} \tag{6-3}$$



(a) 椭球面　　(b) 投影平面

图 6-2　长度比

(二)投影变形的分类

投影变形包括长度、角度及面积 3 个方面。

1. 长度变形

长度比 m 与 1 之差，称为长度变形，用 r 表示，即

$$r = m - 1 \tag{6-4}$$

m 的值可能大于、小于、等于 1，因此 r 的值可能为正、为负或为零。

2. 角度变形

在研究投影前后图形是否相似的情况时，需要考察投影前后角度是否发生变形。设椭球面上一个角度 u，投影到平面上为 u'，则 $(u' - u)$ 称为角度变形。

3. 面积变形

在有些情况下，我们需要研究投影前后图形的面积的变形情况，可以依据面积比来衡量。面积比是指椭球面上一无限小的图形，投影到平面上的面积与原椭球面图形面积之比的极限。椭球面上一微分圆投影到平面上为一微分椭圆。椭球面上单位圆的面积为 π，微分椭圆的面积为 πab ，所以投影的面积比为

$$P = \frac{\pi ab}{\pi} = ab \tag{6-5}$$

与长度变形的定义方式相同，面积比与 1 的差值 $(P - 1)$ 称为面积变形。

(三)投影的分类

投影的分类方法很多，若按投影面来分，有平面、圆锥面、圆柱面和椭圆柱面投影等；若按投影面的轴向来分，有正轴、横轴、斜轴投影等；还有根据创始人的姓名命名的，如兰勃特、墨卡托、高斯投影等等。一般，我们按变形性质来分，则有等角、等面积、等距离任意投影等。等角投影是指投影前后角度不发生变形；等面积投影是指投影前后保持图形面积没有变形；任意投影是指各种变形都存在，但都很小。

从以上分类来看，无论采取哪种投影总要产生部分变形。等面积投影，虽然保持面积不变，但角度变形较大，长度也有变形。这种投影多用于行政区划图、经济图等。任意投影，各种变形都有，但均较小，适用于一般要求不太严格的地图。等距离投影在某方向上长度不变形，但面积、角度以及其他方向上的长度都有变形，它适用于普通地图和交通图。等角投影，保持角度不变形，即也保持了小范围内图形相似，但长度有变形，面积变形还较大。它便于地形图的测制和应用，对于军事上、工程上的定位和定向也很有实用价值，因此多用于国家基本地形图以及航海图、航空图等。在大地测量中，由于大量的观测数据是角度，所以采用等角投影是很有利的。

综上所述，地图投影必然产生投影变形。对于各种投影变形，人们可以根据具体的需要进行掌握和控制。可以使某一种变形为零，也可以使全部变形都存在。但减小到某一适当程度，或企图使全部变形同时消失，显然是不可能的。

§6-2　椭球面到平面的正形投影

一、正形投影的特点

投影的选择，是根据实际需要决定的。大地测量中，为了控制测图和计算的需要，常常需要将一定范围的大地控制网投影到平面上进行解算。因此大地测量中所用的投影应从计算和

测图两个方面的要求来考虑。如果将椭球面上的微小图形(例如某一区域的大地控制网)投影到平面上,能使投影前后图形保持相似,即角度保持不变,这样在计算和测图、用图时将有很大的便利。在这种投影中,角度不产生变形,即前面讲过的等角投影;又在一定范围内,投影前后图形保持相似,因此又叫正形投影。

鉴于正形投影使投影前后角度不变,在平面上解算大地控制网时,就可以把椭球面上的角度不加改正地直接转换到平面上,唯一需要顾及的是,椭球面上的大地线投影至平面上通常是一曲线,而平面上的计算采用两点间弦线需要把投影曲线方向化为弦线方向。这种方向改正一般很小,改化公式也较简单。只是在一定等级的三角测量中应当顾及,而在图根控制测量和地形测图、用图中不必顾及。又因正形投影前后微小图形保持相似,这意味着在一定的较大比例尺地形图中,因其范围不大,图内各种地形、地物相对位置,在顾及地图比例尺后,与实地完全相同。显然,这样的地图对国防和经济建设极为方便。因此,只有正形投影才最适用于地形测图。

正形投影的特点是什么?如图 6-3 所示,椭球面上一个微小中点多边形 $OABCDE$,正形投影到平面上为 $O'A'B'C'D'E'$。根据正形投影的定义知投影前后两个微小图形相似,亦即角度不变。因此,$\angle AOB = \angle A'O'B'$,$\angle BOC = \angle B'O'C'$,$\angle COD = \angle C'O'D'$,$\angle DOE = \angle D'O'E'$,$\angle EOA = \angle E'O'A'$,又两个微小图形的相应微小线段的比例也应相等,即 $\frac{O'A'}{OA} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{O'C'}{OC} = \frac{O'D'}{OD} = \frac{O'E'}{OE} = m =$ 常数,式中 m 为长度比。由此可见,正形投影的特点是:在微小范围内,长度比在各方向相等,即 m 与方向无关。但是正形投影的这个特点是有条件的,只有在微小范围内才能成立。在广大面积上保持地图与实地相似是不可能的。所以,在大范围内,各点的长度比 m 是不一样的,即 m 与点的位置有关系。综上所述,正形投影的特点是,长度比 m 与方向无关但随点位的变化而变化。

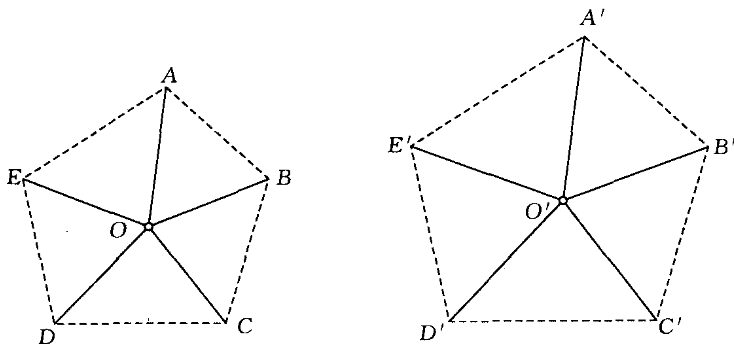


图 6-3 正形投影前后图形相似

二、正形投影条件

(一)等量坐标

研究正形投影条件时,使用等量坐标比大地坐标更为方便。首先给出等量坐标的概念。

在椭球面上,采用大地坐标 L、B 为参数的经纬线网时,如图 6-2 所示,椭球面上的弧素可表示为

$$dS^2 = M^2 dB^2 + r^2 dL^2 \tag{6-6}$$

这时，经线弧素和纬线弧素分别为

$$\left.\begin{aligned} dS_L &= MdB \\ dS_B &= rdL \end{aligned}\right\}$$

在椭球面上，M 和 r 是不相等的，当取 $dB = dL$ 时，dS_L 和 dS_B 也是不相等的。所以由大地坐标 L、B 构成的经纬线网，只能把椭球面划分为无穷小的矩形。

为了研究问题的方便，在地图投影中，常用等量坐标 l、q 来代替大地坐标 L、B 组成经纬线网，这里 l 为等量经度，它等于某点经度 L 与假设的零子午线经度 L_0 之差，即

$$\left.\begin{aligned} l &= L - L_0 \\ dl &= dL \end{aligned}\right\} \tag{6-7}$$

设

$$dq = \frac{M}{r}dB \tag{6-8}$$

式中，q 为等量纬度，它是大地纬度 B 的函数。则式(6-6)可简化为

$$dS^2 = r^2[(dq)^2 + (dl)^2] \tag{6-9}$$

这时，经线弧素和纬线弧素分别为

$$\left.\begin{aligned} dS_L &= rdq \\ dS_B &= rdl \end{aligned}\right\}$$

显然，当取 $dq = dl$ 时，dS_L 和 dS_B 也是相等的。所以由 l、q 为参数的经纬线网，把椭球面划分为无穷小的正方形，即矩形相邻两边是等量的，因此把 l、q 称为等量坐标。等量经纬线网与大地经纬线网的区别只不过是改变了纬线的位置间隔，在建立投影方程时，使用等量坐标更为方便。

(二)正形投影条件的推导

基本思路：要导出正形投影的一般条件，就必须紧紧抓住正形投影区别于其他投影的特征。即在正形投影中长度比与方向无关。具体步骤为

(1)由长度比定义，导出长度比的具体公式；

(2)根据长度比 m 与方位角 A 无关，导出正形投影的一般条件。

如图 6-2 所示，投影平面的弧素 ds，由高等数学中平面曲线的弧素公式直接写出

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \tag{6-10}$$

由长度比的定义式(6-3)，则有

$$m^2 = \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{r^2[(dq)^2 + (dl)^2]} \tag{6-11}$$

由于大地坐标 (B,L) 与等量坐标 (q,l) 一一对应，所以投影方程式(6-1)也可写成

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(q,l) \\ y &= f_2(q,l) \end{aligned}\right\} \tag{6-12}$$

上式是投影方程的另一种形式，其中 f_1 和 f_2 是投影函数。

对式(6-12)取全微分，得

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q}dq + \frac{\partial x}{\partial l}dl \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q}dq + \frac{\partial y}{\partial l}dl \end{aligned}\right\}$$

将上式代入式(6-10)，得

$$ds^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial q}dq + \frac{\partial x}{\partial l}dl\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial q}dq + \frac{\partial y}{\partial l}dl\right]^2 =$$

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2\right](dq)^2 +$$

$$2\left[\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial l}\right]dq \cdot dl + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right](dl)^2 \tag{6-13}$$

令

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial l} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{6-14}$$

则

$$ds^2 = E(dq)^2 + 2F(dq)(dl) + G(dl)^2 \tag{6-15}$$

将上式代入式(6-11)，得

$$m^2 = \frac{E(dq)^2 + 2F(dq)(dl) + G(dl)^2}{r^2[(dq)^2 + (dl)^2]} \tag{6-16}$$

上式不包含与方向有关的元素，为引入“长度比 m 与方位角 A 无关”这个条件，对式(6-16)还需做如下变换。

如图 6-2 所示

$$\tan(90° - A) = \frac{P_2P_1}{PP_2} = \frac{MdB}{rdl} = \frac{dq}{dl}$$

即

$$dl = \tan A dq \tag{6-17}$$

$$m^2 = \frac{E(dq)^2 + 2F(dq)(dl) + G(dl)^2}{r^2[(dq)^2 + (dl)^2]} = \frac{E + 2F\tan A + G\tan^2 A}{r^2\sec^2 A} =$$

$$\frac{E\cos^2 A + 2F\sin A\cos A + G\sin^2 A}{r^2} \tag{6-18}$$

由上式知，要使 m 与 A 无关，必须满足

$$F = 0, \quad E = G$$

将式(6-14)代入上式，得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial l} = 0 \\ &\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{6-19}$$

求解式(6-19)并舍去不合理结果，可得椭球面到平面的正形投影条件为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\partial y}{\partial l} \\ \frac{\partial x}{\partial l} &= -\frac{\partial y}{\partial q} \end{aligned}\right\} \tag{6-20}$$

上述正形投影条件是由法国数学家柯西(A. L. Cauchy)和德国数学家黎曼(B. Riemann)导出的,又称柯西-黎曼微分方程。

柯西-黎曼微分方程是正形投影的充分必要条件。同理,也可以导出平面到椭球面正形投影的一般条件为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x}&=\frac{\partial l}{\partial y}\\\frac{\partial l}{\partial x}&=-\frac{\partial q}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

在满足 $F=0,E=G$ 的条件后,椭球面正形投影到平面的长度比公式可化简为

$$\left.\begin{aligned}m^2&=\frac{E}{r^2}=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2}{r^2}\\m^2&=\frac{G}{r^2}=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2}{r^2}\end{aligned}\right\}\tag{6-21}$$

上面两个公式是等价的,只是表现形式不同,可以具体根据求导的方便进行选择。这一公式将用于进一步研究高斯投影的长度比、长度变形规律及距离改正等。由于高斯投影方程对 l 求导比较方便,在使用时一般采用第二式。

§6-3　高斯投影

一、高斯投影的概念

(一)高斯投影产生的背景

高斯投影是高斯-克吕格投影的简称,也称为等角横切椭圆柱投影,是地球椭球面到平面上正形投影的一种。它是德国数学家、物理学家、大地测量学家高斯在1820～1830年间对德国汉诺威地区的三角测量成果进行处理时,曾采用了由他本人研究的将一条中央子午线长度投影规定为固定比例尺度的椭球正形投影。但他并没有把该成果发表和公布。人们只是从他给朋友的部分信件中知道这种投影的结论性投影公式。

史赖伯于1866年出版的专著《汉诺威大地测量投影方法的理论》中进行了整理和加工,从而使高斯投影的理论得以公布于世。

更详细地阐明高斯投影理论并给出实用公式的是由德国大地测量学家克吕格在他1912年出版的专著《地球椭球向平面的投影》中给出的。在这部著作中,克吕格对高斯投影进行了比较深入地研究和补充,从而使之在许多国家得以应用。因此,将该投影称之为高斯-克吕格投影,简称高斯投影。

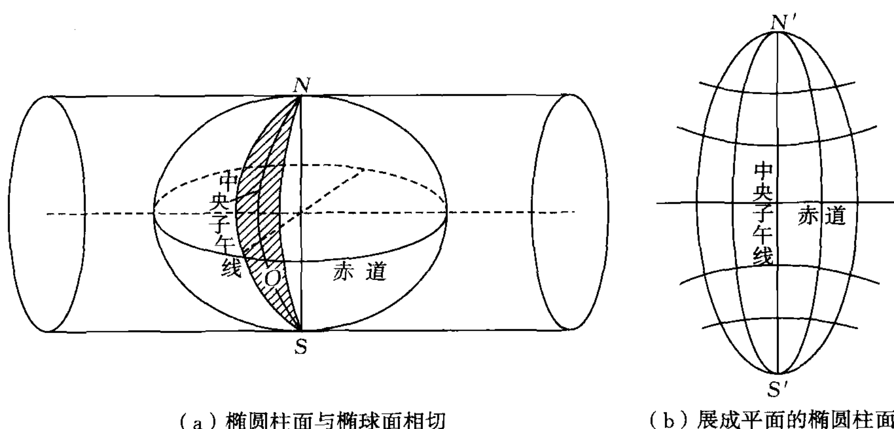
为了方便地实际应用高斯投影,德国学者巴乌盖尔在1919年建议采用3°带投影,并把纵坐标轴西移500 km,在纵坐标前冠以带号,这个投影带是从格林尼治开始起算的。

高斯投影得到了世界许多测量学家的重视和研究。其中保加利亚的测量学者赫里斯托夫的研究工作最具代表性。他的两部专著1943年《旋转椭球上的高斯-克吕格坐标》及1955年《克拉索夫斯基椭球上的高斯和地理坐标》,在理论及实践上都丰富和发展了高斯投影。

现在世界上许多国家都采用高斯投影，比如奥地利、德国、希腊、英国、美国、苏联等，我国于1952年正式采用高斯投影。

（二）高斯投影的几何概念

首先用几何的方法来描述高斯投影的基本概念。如图6-4(a)所示，设想用一个椭圆柱横套在地球椭球体的外面，并与椭球面上某一子午线相切，椭圆柱的中心轴线通过椭球中心。与椭圆柱面相切的子午线称为投影带的中央子午线，将中央子午线两侧一定经差范围内的椭球面元素，按正形投影方法投影到椭圆柱面上，然后将椭圆柱面沿着通过椭球南极和北极的母线展开，即得到投影后的平面元素。这就是高斯-克吕格投影的几何描述，该平面称为高斯投影平面。在此平面上，中央子午线和赤道的投影都是直线，其他子午线和纬线的投影都是曲线。如图6-4(b)所示。



（a）椭圆柱面与椭球面相切　　（b）展成平面的椭圆柱面

图6-4　高斯投影的几何描述

如何用数学解析的方法来确定高斯投影的投影关系呢？最关键的是要确定椭球面上点与其投影点间的一一对应关系。要建立椭球面大地坐标与平面坐标间的对应关系，即要按一定的数学规则确定投影方程。因此投影问题变成了如何确定投影函数的具体形式。不同的投影方法确定了不同的投影函数形式，具体的投影方法是由投影条件所决定的。地图投影定义中的所谓“一定的数学规则”实际上指的就是具体的投影条件。下面我们根据高斯投影的概念来分析其投影条件。

在高斯投影中，中央子午线与椭圆柱面相切，很显然，椭圆柱面沿母线展开成平面后，中央子午线变成一条直线，并且长度保持不变。前面已经分析过，如果能保证投影前后图形保持相似，这对研究大地测量中的投影问题将是非常有利的。因此要求高斯投影是正形投影。归纳起来，高斯投影应具备如下3个条件：

(1)正形条件；

(2)中央子午线投影为一直线；

(3)中央子午线投影后长度不变。

以上3个条件中，第一个条件是正形投影的一般条件；后面两个条件是高斯投影本身的特定条件。这里所说的正形条件，即主方向的长度比 $a = b$ 或 $m_L = m_B$，从数学的解析方法来说就是满足柯西-黎曼微分方程。

如何根据高斯投影的3个投影条件，确定投影函数，进而得到投影公式，将在下节中详细

讨论。这里只是近似地描述了高斯投影的几何概念。

二、高斯投影的分带

(一)分带的原因及原则

高斯投影中，除了中央子午线外，其他任何线段，投影后都产生长度变形，而且离中央子午线越远，变形越大。为此要对其加以限制，以减小其影响。限制长度变形的最有效办法，就是“分带”投影。具体地说，就是将整个椭球面沿子午线划分成若干个经差相等的狭窄的地带，各带分别进行投影，于是可得到若干不同的投影带。位于各带中央的子午线称为中央子午线，用以分割投影带的子午线(投影带边缘的子午线)称为分带子午线。

由于分带把投影区域限定在中央子午线两旁狭窄范围之内，所以有效地限制了长度变形，显然，在一定的范围内，带数越多，各带越窄，长度变形也就越小。从限制长度变形这个角度来考虑，分带越多越好。

分带投影后，各投影带有各自不同的坐标轴和原点，从而形成彼此相互独立的高斯平面坐标系。这样，位于分带子午线两侧的点就分属于两个不同的坐标。在生产作业中，作业区域往往分跨于不同的投影带内，需要将其化为同一坐标系中，因而必须进行不同投影带之间的坐标换算(称为邻带换算)。从这个角度来考虑，为了减少换带计算及在换带计算中引起的计算误差，则又要求分带不宜过多。

实际分带时，应当兼顾上述两方面的要求。我国投影分带主要有6°带(每隔经差6°分一带)和3°带(每隔经差3°分一带)两种分带方法。6°带可用于中小比例尺测图，3°带可用于大比例尺测图。国家标准中规定：所有国家大地点均按高斯正形投影计算其在6°带内的平面直角坐标。在1∶1万和更大比例尺测图的地区，还应加算其在3°带内的平面直角坐标。具体的邻带换算方法将在下节介绍。

(二)分带方法

如图6-5所示，高斯投影6°带，自0°子午线起向东划分，每隔经差6°为一带，带号依次编为第1,2,3,…,60带。各带中央子午线的经度依次为3°,9°,…,357°。设带号为n，中央子午线经度为L_0，则有

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= n6^\circ - 3^\circ \\ n &= \frac{L_0 + 3^\circ}{6} \end{aligned}\right\} \tag{6-22}$$

已知某点大地经度L时，可按下式计算该点所在的3°带投影带带号

$$n = \frac{L}{6} \text{的整数商} + 1\text{(如果有余数)}$$

3°带是在6°带的基础上划分的，其奇数带的中央子午线与6°带中央子午线重合；偶数带的中央子午线与6°带的分带子午线重合。具体的分带是自东经1.5°子午线起，向东划分，每隔经差3°为一带。带号依次编为3°带的第1,2,3,…,120带，如图6-5所示。设带号为n'，则各带中央子午线的经度为

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= 3^\circ n' \\ n' &= L_0/3 \end{aligned}\right\} \tag{6-23}$$

已知某点大地经度L时，可按下式计算该点所在的6°带投影带带号

$$n' = \frac{L - 1.5}{3} \text{的整数商} + 1$$

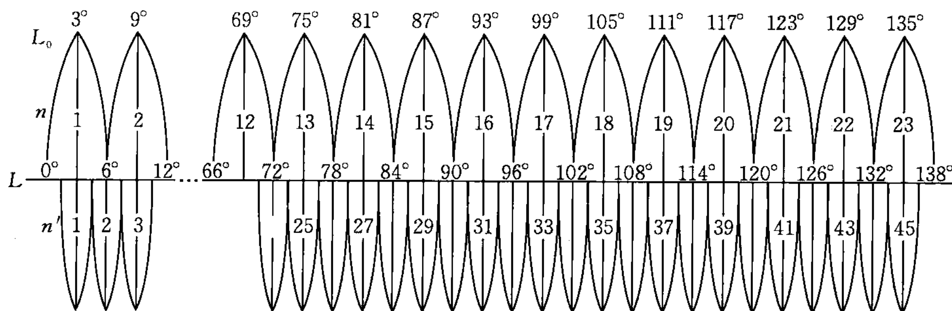


图 6-5 高斯投影分带

(三)投影带的重叠

分带投影后，相邻两带的直角坐标系是相互独立的。为了进行跨带三角锁网平差、跨带地形图的测制、使用以及图幅外三角点(位于相邻投影带)的展点等，规定相邻投影带须有一定的重叠，如图 6-6 所示。

所谓投影带的重叠就是在一定范围内三角点有相邻两带的坐标值，在这个范围内的地形图有两套方里网(分别是本带和邻带坐标系的方里网)。这样就建立了相邻两带间的坐标关系，从而为处理跨带三角锁网平差、跨带地图的拼接、图幅外三角点的展点等问题提供了控制基础。

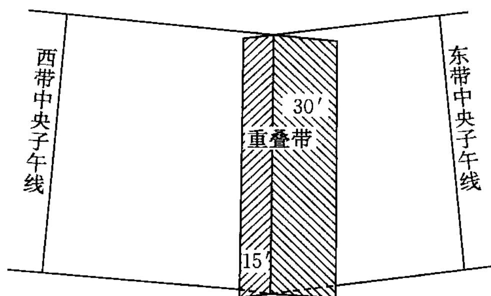


图 6-6 投影带的重叠

目前，我国对投影带重叠作如下规定：西带向东带重叠经差为 30′的范围(相当于 1∶10 万图幅的经幅)，东带向西带重叠经差为或 15′的范围(相当于 1∶5万图幅的经幅)。即每个投影带向东扩延 30′，向西扩延 15′，这样在分带子午线附近构成经差 45′的重叠范围，如图 6-6 所示。

三、高斯平面直角坐标系

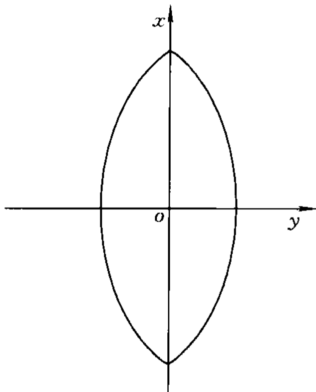


图 6-7 高斯平面直角坐标系

(一)高斯平面直角坐标系的建立

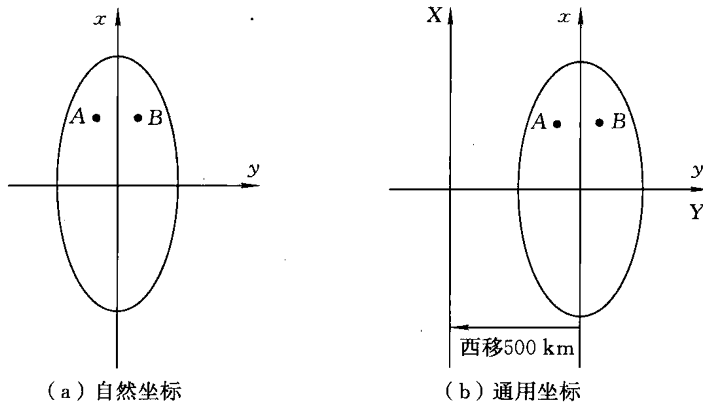
由于高斯投影是分带进行投影的，每个投影带都有各自不同的中央子午线，投影带间互不相干，因此，在每个投影带中均可以建立各自不同的平面直角坐标系。由高斯投影知，中央子午线与赤道投影后均为直线且正交。如果以中央子午线的投影为纵坐标轴，即 x 轴，赤道的投影为横坐标轴，即 y 轴，中央子午线与赤道的交点投影为原点 o，于是，构成了高斯平面直角坐标系 o—xy，习惯上，x 轴指向朝北，y 轴指向朝东，如图 6-7 所示。

由于高斯平面坐标系的建立，严格地说，高斯投影中的第二个投影条件应改为“中央子午线投影为纵坐标轴”。所以中央子午线又称为轴子午线。它是计算经差的零子午线，也是计算等量经

度 l 的"假定零子午线"。

(二)自然坐标与通用坐标

我国位于北半球,且幅员辽阔,西起东经 73°40′(新疆帕米尔高原乌孜别里山口附近),东至东经 135°02′30″(黑龙江省抚远县乌苏里江汇合处);南起北纬 3°52′(南海南沙群岛的曾母暗沙),北至北纬 53°31′10″(黑龙江省漠河镇以北的黑龙江江心)。根据我国北半球的地理位置,分带投影后,高斯坐标的 x 值均为正值,而 y 值则有正有负。为了避免 y 值出现负号,规定将 y 值加上 500 km。相当于将 x 轴西移了 500 km,这样一来 y 坐标也均为正的。又由于我国东西横跨十几个 6°带,各带分别投影,各自形成相互独立的平面直角坐标系。同一对坐标值 (x,y) 在每个投影带都有一点与其对应,很容易引起点位的混淆与错乱。为了说明某点位于哪一带,又规定在加了 500 km 的 y 值前面冠以带号。按上述规定形成的坐标,称为通用坐标,用符号 $y_{通用}$ 或 Y 表示。在点的成果表中均写为通用坐标的形式。实际应用时,需要去掉带号,减去 500 km,恢复原来的数值,称为该点的自然坐标。自然坐标与通用坐标的关系如图 6-8 所示。



(a) 自然坐标　　(b) 通用坐标

图 6-8　自然坐标与通用坐标的关系

例如,在 6°带第 19 带中,A、B 两点的自然坐标分别为

$$A:\begin{cases}x = 4\ 485\ 076.81\ \text{m}\\ y = -2\ 578.86\ \text{m}\end{cases}\qquad B:\begin{cases}x = 4\ 485\ 076.81\ \text{m}\\ y = 2\ 578.86\ \text{m}\end{cases}$$

则它们的通用坐标分别是

$$A:\begin{cases}X = 4\ 485\ 076.81\ \text{m}\\ Y = 19\ 497\ 421.14\ \text{m}\end{cases}\qquad B:\begin{cases}X = 4\ 485\ 076.81\ \text{m}\\ Y = 19\ 502\ 578.86\ \text{m}\end{cases}$$

除了高斯投影,还有其他一些投影方法,目前国际上应用较为广泛的还有通用墨卡托投影。

通用横墨卡托投影属于等角横割椭圆柱投影。它也有三个投影条件,前两个条件与高斯投影相同,只是第三个条件与高斯投影不同,即中央子午线投影长度比不等于 1,而等于 0.999 6。使得整个投影带的长度比普遍减小了万分之四,长度变形最大值为 0.000 98,因而满足了地形图对长度变形的最低要求,克服了高斯投影长度变形大的缺点。这个投影是美国军事测绘局 1938 年提出的,1945 年以来,先后有上百个国家和地区采用。

§6-4 高斯投影正反算与邻带换算

一、高斯投影正算公式

(一)公式推导

高斯投影正算，就是椭球面元素到平面元素的投影计算，即已知椭球面大地坐标(L,B)计算高斯平面直角坐标(x,y)，也即是确定高斯投影方程的过程。

已知椭球面到平面投影方程（分别用l,q和x,y表示坐标）的一般形式是

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(l,q) \\ y &= f_2(l,q) \end{aligned}\right\} \tag{6-24}$$

基本思路是，根据高斯投影的三个条件，确定投影函数f_1和f_2的具体形式，进而导出高斯投影正算公式。

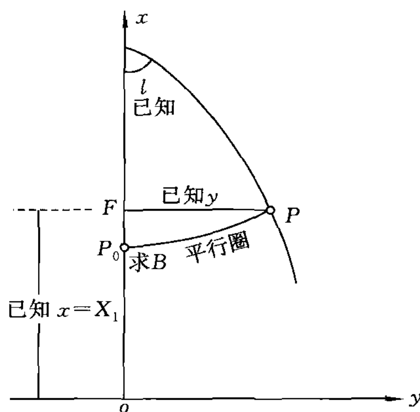


图 6-9 高斯投影正算

在椭球面上，已知P点的大地坐标为(L,B)，相应的等量坐标为(l,q)，现求投影后的平面坐标(x,y)，如图 6-9 所示。

我们知道，高斯投影是沿中央子午线东西各一定经度范围内的狭窄地带进行的，在每一个投影区域中，点对中央子午线的经差l是较小的，一般在0～3.5°以内，其弧度值$\frac{l}{\rho}$为一微小量，所以可将式(6-24)中的函数展开成经差l的幂级数

$$\left.\begin{aligned} x &= m_0 + m_1 l + m_2 l^2 + m_3 l^3 + m_4 l^4 + \cdots \\ y &= n_0 + n_1 l + n_2 l^2 + n_3 l^3 + n_4 l^4 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-25}$$

式中，m_0、m_1、$m_2\cdots$，n_0、n_1、$n_2\cdots$为待定系数，它们是等量纬度q(或大地纬度B)的函数。根据高斯投影的第一个投影条件的需要，对式(6-25)求偏导数得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}q} + l\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}q} + l^2\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}q} + l^3\frac{\mathrm{d}m_3}{\mathrm{d}q} + l^4\frac{\mathrm{d}m_4}{\mathrm{d}q} + \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial l} &= m_1 + 2m_2 l + 3m_3 l^2 + 4m_4 l^3 + \cdots \\ \frac{\partial y}{\partial q} &= \frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}q} + l\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}q} + l^2\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}q} + l^3\frac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}q} + l^4\frac{\mathrm{d}n_4}{\mathrm{d}q} + \cdots \\ \frac{\partial y}{\partial l} &= n_1 + 2n_2 l + 3n_3 l^2 + 4n_4 l^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-26}$$

引入高斯投影的第一个条件，即正形投影的一般条件$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial l}$，$\frac{\partial x}{\partial l} = -\frac{\partial y}{\partial q}$得

$$\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}q} + l\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}q} + l^2\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}q} + l^3\frac{\mathrm{d}m_3}{\mathrm{d}q} + l^4\frac{\mathrm{d}m_4}{\mathrm{d}q} + \cdots = n_1 + 2n_2 l + 3n_3 l^2 + 4n_4 l^3 + \cdots$$

$$m_1 + 2m_2 l + 3m_3 l^2 + 4m_4 l^3 + \cdots = -\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}q} - l\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}q} - l^2\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}q} - l^3\frac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}q} - l^4\frac{\mathrm{d}n_4}{\mathrm{d}q} + \cdots$$

为使上面两式两端相等，其充分必要条件是 l 的同次幂的系数相等。

由图 6-10 的关系可知，如果 n_0 已知，按照实线箭头的求导顺序，则可以依次求出 m_1、n_2、m_3、n_4、m_5 等系数；同样，如果 m_0 已知，按照虚线箭头的求导顺序，也可依次求出 n_1、m_2、n_3、m_4、n_5 等系数。因此，要确定投影方程中的各代定系数，最关键的就是要求定 n_0 和 m_0 的值。如何求 n_0 和 m_0 这两个系数呢？我们引入高斯投影的后面两个条件。

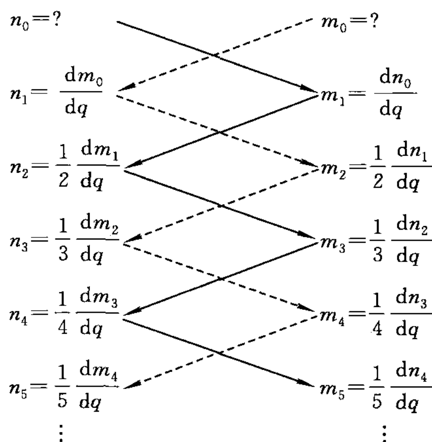


图 6-10　高斯投影正算各代定系数间的关系

由高斯投影的第二个条件，即中央子午线投影后为纵坐标轴，用数学表达式表示为 $l=0$ 时，$y=0$。代入式(6-25)的第二式，则有

$$n_0 = 0 \tag{6-27}$$

由图 6-10 中的系数关系，可得

$$m_1 = n_2 = m_3 = n_4 = \cdots = 0$$

由上式，图 6-10 中的系数关系写成

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= n_2 = m_3 = n_4 = \cdots = 0 \\ n_1 &= \frac{dm_0}{dq} \\ m_2 &= -\frac{1}{2}\frac{dn_1}{dq} \\ n_3 &= \frac{1}{3}\frac{dm_2}{dq} \\ m_4 &= -\frac{1}{4}\frac{dn_3}{dq} \\ n_5 &= \frac{1}{5}\frac{dm_4}{dq} \end{aligned}\right\} \tag{6-28}$$

因为 $n_0 = m_1 = n_2 = m_3 = n_4 = \cdots = 0$，所以式(6-25)可化简成

$$\left.\begin{aligned} x &= m_0 + m_2 l^2 + m_4 l^4 + \cdots \\ y &= n_1 l + n_3 l^3 + n_5 l^5 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-29}$$

由上式可以看出，高斯投影在中央子午线东西两侧的投影是对称于中央子午线的。

接下来确定 m_0 的值，引入高斯投影的第三个条件：中央子午线投影后长度不变形。由该条件可知，位于中央子午线上的两点投影后，在平面上此两点间线段的长度与投影前两点间的子午线弧长相等。假定其中有一点位于中央子午线与赤道的交点，则投影后的点的纵坐标 x 应该等于投影前从赤道量至该点的子午线弧长 X，即在式(6-25)的第一式中，当 $l=0$ 时，有

$$x = m_0 = X \tag{6-30}$$

由点的大地纬度 B 可求出从赤道量至该点的子午线弧长 X，由式(6-30)即可求出系数 m_0 的值。下面由图 6-10 中的系数关系，求定 n_1、m_2、n_3、m_4、n_5 等系数。

由子午线弧长微分公式 $dX = MdB$ 和式(6-8) $\frac{dB}{dq} = \frac{r}{M}$，得

$$\frac{dm_0}{dq} = \frac{dX}{dq} = \frac{dX}{dB}\frac{dB}{dq} = r$$

故

$$n_1 = r = N\cos B \tag{6-31}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q}$$

由式(5-44) $r = N\cos B$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}B} = -M\sin B$$

而

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} = \frac{r}{M}$$

于是得

$$\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}q} = -r\sin B = -N\cos B\sin B$$

代人式(6-28)的第三式，得

$$m_2 = \frac{N}{2}\sin B\cos B \tag{6-32}$$

由于本章中有些公式较长，为了使公式书写简洁、易于阅读，在本章中特引入下列符号

$$\left.\begin{aligned} \eta &= e'\cos B \\ t &= \tan B \end{aligned}\right\}$$

由 m_2 依次求导，并依次代人式(6-28) 可得 $n_3, m_4, n_5, \cdots$ 为

$$\left.\begin{aligned} n_3 &= \frac{N}{6}\cos^3 B(1 - t^2 + \eta^2) \\ m_4 &= \frac{N}{24}\sin B\cos^3 B(5 \cdot t^2 + 9\eta^2) \\ n_5 &= \frac{N}{120}\cos^5 B(5 \cdot 18t^2 + t^4) \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{6-33}$$

将式(6-30)、式(6-31)、式(6-32)和式(6-33)代入式(6-29)，并略去 $\eta^2 l^5$ 及 l^6 以上各项，最后得出高斯投影正算公式如下

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \frac{N}{2\rho''^2}\sin B\cos B l''^2 + \frac{N}{24\rho''^4}\sin B\cos^3 B(5 - t^2 + 9\eta^2)l''^4 \\ y &= \frac{N}{\rho''}\cos B l'' + \frac{N}{6\rho''^3}\cos^3 B(1 - t^2 + \eta^2)l''^3 + \frac{N}{120\rho''^5}\cos^5 B(5 - 18t^2 + t^4)l''^5 \end{aligned}\right\} \tag{6-34}$$

式中，l 为椭球面上 P 点与中央子午线的经差，若 P 点在中央子午线的东侧，则 l 为正，若 P 点在中央子午线的西侧，则 l 为负；B 为 P 点的大地纬度；X 为由赤道至纬度为 B 的子午线弧长。当 P 点的大地坐标(L,B)为已知时（中央子午线的经度 L_0 是已知的，则 $l = L - L_0$ 即可算出），即可按式(6-34) 计算 P 点的高斯平面坐标(x,y)。

式(6-34)所表示的 (x,y) 和(L,B) 的函数关系，即确定了式(6-24) 中 f_1 和 f_2 的具体形式。

当 $l < 3.5°$时，按式(6-34)计算的精度为±0.1 m。若要使计算精确至±0.001 m，可将

式(6-34)的级数项继续扩充。过程略，现直接给出具体计算公式如下

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \frac{N}{2\rho''^2}\sin B\cos B \cdot l''^2 + \frac{N}{24\rho''^4}\sin B\cos^3 B(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)l''^4 + \\ &\quad \frac{N}{720\rho''^6}\sin B\cos^5 B(61 - 58t^2 + t^4)l''^6 \\ y &= \frac{N}{\rho''}\cos B l'' + \frac{N}{6\rho''^3}\cos^3 B(1 - t^2 + \eta^2)l''^3 + \frac{N}{120\rho''^5}\cos^5 B(5 - 18t^2 + \\ &\quad t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)l''^5 \end{aligned}\right\} \tag{6-35}$$

(二)公式分析

分析式(6-35)可以得出椭球面上经纬线投影后的形状，如图6-11所示。

1. 中央子午线

当 $l=0$ 时，有 $y=0, x=X$，说明中央子午线投影为纵坐标轴，且长度不变。与高斯投影的后两个投影条件相一致。

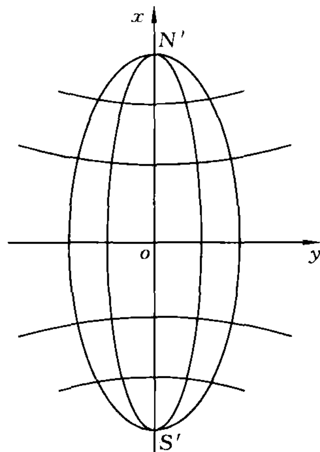


图 6-11　经纬线投影形状

2. 赤道

当 $B=0$ 时，有 $x=0$，y 仅随 l 而变化。说明赤道投影为横坐标轴。

3. 中央子午线和赤道交点

当 $B=0, l=0$ 时，有 $x=0, y=0$，所以它们的交点投影为平面直角坐标系的原点。

4. 一般子午线

这时 $l=$ 常数，x 和 y 仅随 B 而变化。当 B 值增大时，x 值增大，而 y 值减小；当 B 值为负时，$\sin(-B)=-\sin B$，$\cos(-B)=\cos B$，故 x 值反号而 y 值相同。因此，子午线的投影是一条对称于 y 轴的曲线，它弯向 x 轴，并向两极收敛。

5. 平行圈

这时 $B=$ 常数，x 和 y 仅随 l 而变化。当 l 值增大时，x 值增大，y 值也增大；当 l 值为负时，因为 x 是 l 的偶次幂函数，y 是 l 的奇次幂函数，故 x 值相同而 y 值反号。所以平行圈的投影是一条对称于 x 轴的曲线，并弯向极点。

综上所述，椭球面上对称于中央子午线和赤道的经纬线网，投影后仍保持对称性，即对称于 x 轴和 y 轴。由于是正形投影，保持角度不变，正交的经纬线网，投影后仍保持正交。离开中央子午线愈远的经线和离开赤道愈远的纬线，投影后弯曲程度愈大。

(三)实用公式

这里介绍适合于用计算机编程计算的高斯投影正算的实用公式，并按克拉索夫斯基椭球、IUGG 1975 椭球和 CGCS 2000 椭球分别给出有关的参数，以便实用。

1. 高斯投影正算公式(精度为 ± 0.001 m)

由式(6-35)，令

$$m = \cos B \cdot l \cdot \frac{\pi}{180}$$

则得

$$\left.\begin{aligned}x &= X + Nt\left[\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{24}(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)m^4 + \frac{1}{720}(61 - 58t^2 + t^4)m^6\right] \\ y &= N\left[m + \frac{1}{6}(1 - t^2 + \eta^2)m^3 + \frac{1}{120}(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)m^5\right]\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}36)$$

式中，子午线弧长 X，对于 1954 北京坐标系采用的克拉索夫斯基椭球，按式(5-41)计算；对于 1980 西安坐标系采用的 IUGG1975 椭球，按式(5-42)计算；对于 2000 国家大地坐标系采用的 CGCS 2000 椭球，按式(5-43)计算。计算至公式中的 8 次幂项。

2. 高斯投影正算公式(精度为±0.1 m)

由式(6-34)，令 $m = \cos B \cdot l \cdot \frac{\pi}{180}$，则得

$$\left.\begin{aligned}x &= X + Nt\left[\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{24}(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)m^4\right] \\ y &= N\left[m + \frac{1}{6}(1 - t^2 + \eta^2)m^3 + \frac{1}{120}(5 - 18t^2 + t^4)m^5\right]\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}37)$$

式中，子午线弧长 X 的计算仍然根据不同的椭球参数分别按式(5-41)、式(5-42)或式(5-43)进行计算，计算至 6 次幂项即可。

实用公式中用到的有关参数如下：

对于克拉索夫斯基椭球

$$a = 637\,824\,5 \text{ m}$$
$$e^2 = 0.006\,693\,421\,622\,97$$
$$e'^2 = 0.006\,738\,525\,414\,68$$

对于 IUGG 1975 椭球

$$a = 637\,814\,0 \text{ m}$$
$$e^2 = 0.006\,694\,384\,999\,59$$
$$e'^2 = 0.006\,739\,501\,819\,47$$

对于 CGCS 2000 椭球

$$a = 637\,813\,7 \text{ m}$$
$$e^2 = 0.006\,694\,380\,022\,90$$
$$e'^2 = 0.006\,739\,496\,775\,47$$

上机编程运算的算例，如表 6-1 所示。

表 6-1 高斯投影正算算例

已知数据	椭球参数	运算结果/m	
		6°带	3°带
$B = 40°58'32.33''$ $L = 100°10'20.11''$	克拉索夫斯基椭球	$x = 4\,538\,610.951$	$x = 4\,538\,610.951$
		$y = 98\,666.625$	$y = 98\,666.625$
		$Y = 17\,598\,666.625$	$Y = 33\,598\,666.625$
	IUGG 1975 椭球	$x = 4\,538\,532.847$	$x = 4\,538\,532.847$
		$y = 98\,665.022$	$y = 98\,665.022$
		$Y = 17\,598\,665.022$	$Y = 33\,598\,665.022$
	CGCS 2000 椭球	$x = 4\,538\,530.729$	$x = 4\,538\,530.729$
		$y = 98\,664.975$	$y = 98\,664.975$
		$Y = 17\,598\,664.975$	$Y = 33\,598\,664.975$

续表

已知数据	椭球参数	运算结果/m	
		6°带	3°带
$B=35°26'40.38''$ $L=115°08'51.22''$	克拉索夫斯基椭球	$x=3\ 925\ 560.035$	$x=3\ 924\ 588.054$
		$y=-168\ 198.576$	$y=104\ 193.075$
		$Y=20\ 331\ 801.422$	$Y=38\ 604\ 193.075$
	IUGG 1975 椭球	$x=3\ 925\ 492.277$	$x=3\ 924\ 520.313$
		$y=-168\ 195.836$	$y=104\ 191.377$
		$Y=20\ 331\ 804.164$	$Y=38\ 604\ 191.377$
	CGCS 2000 椭球	$x=3\ 925\ 490.447$	$x=3\ 924\ 518.483$
		$y=-168\ 195.757$	$y=104\ 191.328$
		$Y=20\ 331\ 804.243$	$Y=38\ 604\ 191.328$

注：表中 Y 为通用坐标。

二、高斯投影反算公式

(一)公式推导

高斯投影反算公式，则是由高斯平面坐标 (x,y) 求大地坐标(L,B) 的公式。

这时，由平面到椭球面投影方程是

$$\left.\begin{aligned} q &= f'_1(x,y) \\ l &= f'_2(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{6-38}$$

与高斯投影正算公式的推导思路相同。将平面到椭球面的投影方程式(6-38)展开成幂级数的形式，利用待定系数的方法根据高斯投影的三个条件，确定投影函数 f'_1 和 f'_2 的具体形式，进而导出高斯投影反算公式。

反算和正算相反。现在是已知 P 点的高斯平面坐标 (x,y)，反求它在椭球面上的大地坐标(L,B) 或对应的 (l,q)，如图 6-12 所示。

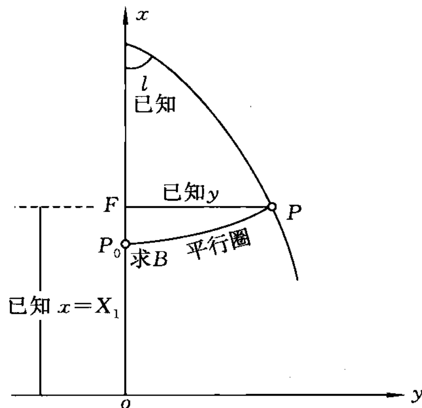


图 6-12　高斯投影反算

P 点的 y 值与椭球半径相比是一微小量，所以可将式(6-38) 中的函数展开成 y 的幂级数。展开时的出发点选为点 $F(x,0)$，F 点叫做底点，它是由 P 点向纵坐标轴所作垂线的垂足。该点的纬度称为底点纬度或垂足纬度，通常用 B_f 表示，它相应的等量纬度为 q_f。赤道至 B_f 处的子午线弧长为 $X_f=x$，B_f 值可由 X_f 按子午线弧长公式反求得到。

根据高斯投影的第二个条件，级数式可参照式(6-29) 直接写成如下简单形式

$$\left.\begin{aligned} q &= m'_0 + m'_2 y^2 + m'_4 y^4 + \cdots \\ l &= n'_1 y + n'_3 y^3 + n'_5 y^5 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-39}$$

根据高斯投影的第一个条件，对式(6-39)求偏导数得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x}&=\frac{\mathrm{d}m_0'}{\mathrm{d}x}+y^2\frac{\mathrm{d}m_2'}{\mathrm{d}x}+y^4\frac{\mathrm{d}m_4'}{\mathrm{d}x}+\cdots\\ \frac{\partial q}{\partial y}&=2m_2'y+4m_4'y^3+\cdots\\ \frac{\partial l}{\partial x}&=y\frac{\mathrm{d}n_1'}{\mathrm{d}x}+y^3\frac{\mathrm{d}n_3'}{\mathrm{d}x}+y^5\frac{\mathrm{d}n_5'}{\mathrm{d}x}+\cdots\\ \frac{\partial l}{\partial y}&=n_1'+3n_3'y^2+5n_5'y^4+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{6-40}$$

引入正形投影一般条件得

$$\frac{\mathrm{d}m_0'}{\mathrm{d}x}+y^2\frac{\mathrm{d}m_2'}{\mathrm{d}x}+y^4\frac{\mathrm{d}m_4'}{\mathrm{d}x}+\cdots=n_1'+3n_3'y^2+5n_5'y^4+\cdots$$

$$y\frac{\mathrm{d}n_1'}{\mathrm{d}x}+y^3\frac{\mathrm{d}n_3'}{\mathrm{d}x}+y^5\frac{\mathrm{d}n_5'}{\mathrm{d}x}+\cdots=-2m_2'y-4m_4'y^3-\cdots$$

根据 y 的同次幂的系数相等，因而有

$$\left.\begin{aligned}n_1'&=\frac{\mathrm{d}m_0'}{\mathrm{d}x}\\ m_2'&=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}n_1'}{\mathrm{d}x}\\ n_3'&=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}m_2'}{\mathrm{d}x}\\ m_4'&=-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}n_3'}{\mathrm{d}x}\\ n_5'&=\frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}m_4'}{\mathrm{d}x}\\ &\vdots\end{aligned}\right\}\tag{6-41}$$

为要求得上述导数，首先得确定 m_0'。由高斯投影第三个条件知，当 $y=0$ 时，$x=X_f$，并设此时的 X_f 所对应的等量纬度 q_f，则从式(6-39) 第一式有

$$q=m'_0=q_f\tag{6-42}$$

代入式(6-41)得

$$\begin{aligned}n'_1&=\frac{\mathrm{d}q_f}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)_f=\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}X}\right)_f=\\ &\left(\frac{M}{N\cos B}\frac{1}{M}\right)_f=\frac{1}{N_f\cos B_f}=\frac{\sec B_f}{N_f}\end{aligned}\tag{6-43}$$

上式中，x 写成 X 只是在 $y=0$ 处成立，也即 $q=q_f$ 时成立，因此，当我们求导数时，凡将 x 写成 X 时，均在导数外加一注脚“f”

依次求导，并代入式(6-41)可得 m_2'、n_3'、m_4'、n_5' 等。

$$\left.\begin{aligned}m_2'&=-\frac{t_f\sec B_f}{2N_f^2}\\ n_3'&=-\frac{\sec B_f}{6N_f^3}(1+2t_f^2+\eta_f^2)\\ m_4'&=\frac{t_f\sec B_f}{24N_f^4}(5+6t_f^2+\eta_f^2)\\ n_5'&=\frac{\sec B_f}{120N_f^5}(5+28t_f^2+24t_f^4)\\ &\vdots\end{aligned}\right\}\tag{6-44}$$

将式(6-42)、式(6-43)、式(6-44)各式代入式(6-41)得

$$\left.\begin{aligned}q &= q_f - \frac{t_f \sec B_f}{2N_f^2}y^2 + \frac{t_f \sec B_f}{24N_f^4}(5 + 6t_f^2 + \eta_f^2)y^4 \\ l &= \frac{\sec B_f}{N_f}y - \frac{\sec B_f}{6N_f^3}(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2)y^3 + \\ &\quad \frac{\sec B_f}{120N_f^5}(5 + 28t_f^2 + 24t_f^4)y^5\end{aligned}\right\} \tag{6-45}$$

以上推导的步骤和方法与正算公式完全类同。但是，现在求得的还只是等量纬度 q，为了最终求出大地纬度 B，我们对式(6-45)第一式还要作进一步的化算。

前面指出，大地纬度和等量纬度有一定的关系，设其函数关系为

$$B = F(q) \tag{6-46}$$

同理

$$B_f = F(q_f) \tag{6-47}$$

又

$$B = F(q) = F(q_f + \overline{q - q_f})$$

将式(6-46)在底点 $F(x,0)$ 处按泰勒级数展开则有

$$B = F(q_f) + \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q}\right)_f (q - q_f) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}q^2}\right)_f (q - q_f)^2 + \cdots \tag{6-48}$$

由式(6-48)得

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q}\right)_f &= \left(\frac{r}{M}\right)_f = \left(\frac{N\cos B}{M}\right)_f = V_f^2 \cos B_f \\ \left(\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}q^2}\right)_f &= -\cos B_f \sin B_f (1 + 4\eta_f^2)\end{aligned}\right\} \tag{6-49}$$

将式(6-47)和式(6-49)代入式(6-48)得

$$B = B_f + V_f^2 \cos B_f (q - q_f) - \frac{1}{2}\cos B_f \sin B (1 + 4\eta_f^2)(q - q_f)^2 \tag{6-50}$$

由式(6-45)第一式，得

$$\left.\begin{aligned}(q - q_f) &= -\frac{t_f \sec B_f}{2N_f^2}y^2 + \frac{t \sec B_f}{24N_f^4}(5 + 6t_f^2 + \eta_f^2)y^4 \\ (q - q_f)^2 &= \frac{t_f^2 \sec^2 B_f}{4N_f^4}y^4\end{aligned}\right\} \tag{6-51}$$

再代入式(6-50)，并经整理得

$$B = B_f - \frac{t_f}{2M_f N_f}y^2 + \frac{t_f}{24M_f N_f^3}(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2)y^4 \tag{6-52}$$

然后，将式(6-52)和式(6-45)的第二式以(″)表示，得高斯投影反算公式如下

$$\left.\begin{aligned}(B_f - B)'' &= \frac{\rho'' t_f}{2M_f N_f}y^2 - \frac{\rho'' t_f}{24M_f N_f^3}(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2)y^4 \\ l'' &= \frac{\rho''}{N_f \cos B_f}y - \frac{\rho''}{6N_f^3 \cos B_f}(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2)y^3 + \\ &\quad \frac{\rho''}{120N_f^5 \cos B_f}(5 + 28t_f^2 + 24t_f^4)y^5\end{aligned}\right\} \tag{6-53}$$

当 $l < 3.5°$ 时，式(6-53)换算的精度为±0.01″。欲要换算至精度为±0.000 1″的坐标公式，可将式(6-53)的级数项继续扩充，现直接给出如下

$$\left.\begin{aligned}(B_f - B)'' &= \frac{\rho'' t_f}{2M_f N_f} y^2 + \frac{\rho'' t_f}{24 M_f N_f^3}(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2) y^4 + \\ &\quad \frac{\rho'' t_f}{720 M_f N_f^5}(61 + 90 t_f^2 + 45 t_f^4) y^6 \\ l'' &= \frac{\rho''}{N_f \cos B_f} y - \frac{\rho''}{6 N_f^3 \cos B_f}(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2) y^3 + \\ &\quad \frac{\rho''}{120 N_f^5 \cos B_f}(5 + 28 t_f^2 + 24 t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2) y^5\end{aligned}\right\} \tag{6-54}$$

最后，按下式计算 L,B

$$\left.\begin{aligned}L &= L_0 + l \\ B &= B_f - (B_f - B)\end{aligned}\right\} \tag{6-55}$$

(二)实用公式

1. 高斯投影反算公式(结果以(°)为单位，精度为±0.000 1″)

由式(6-54)可得

$$\left.\begin{aligned}B^\circ &= B_f^\circ - \frac{1}{2} V_f^2 t_f \left[\left(\frac{y}{N_f}\right)^2 - \frac{1}{12}(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2)\left(\frac{y}{N_f}\right)^4 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{360}(61 + 90 t_f^2 + 45 t_f^2)\left(\frac{y}{N_f}\right)^6\right]\frac{180}{\pi} \\ l^\circ &= \frac{1}{\cos B_f}\left[\left(\frac{y}{N_f}\right) - \frac{1}{6}(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2)\left(\frac{y}{N_f}\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{120}(5 + 28 t_f^2 + 24 t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2)\left(\frac{y}{N_f}\right)^5\right]\frac{180}{\pi}\end{aligned}\right\} \tag{6-56}$$

式中，B_f 是底点纬度，即以 $x = X$(自赤道起算的子午线弧长，这里 X 即为 X_f) 所对应的大地纬度，可用迭代法求得。

现以对应于克拉索夫斯基椭球的式(5-41)为例说明之。

由 X 反求 B_f 迭代程序开始时初值设

$$B_f^{(1)} = X/111\,134.861\,1 \tag{6-57}$$

以后各次迭代计算程序是

$$B_f^{(i+1)} = [X - F(B_f^{(i)})]/111\,134.861\,1 \tag{6-58}$$

$$\begin{aligned}F(B_f^{(i)}) = -(&32\,005.779\,9\sin B_f^{(i)} + 133.923\,8\sin^3 B_f^{(i)} + \\ &0.697\,3\sin^5 B_f^{(i)} + 0.003\,9\sin^7 B_f^{(i)})\cos B_f^{(i)}\end{aligned} \tag{6-59}$$

重复迭代直至 $|B_f^{(i+1)} - B_f^{(i)}| < 1\times10^{-8}$ 止，以保证 B_f 精确至±0.000 1″。一般情况下，迭代五次即可达到要求的精度。在编程计算中需要注意的是，由迭代公式得到的 B_f 是以(°)为单位的，而在迭代运算中，三角函数中的 B_f 则是以 rad 为单位，在迭代程序中需要进行化算。

同理，对应于 IUGG 1975 椭球，由 X 反求 B_f 可采用式(5-42)进行迭代求得，对应于 CGCS 2000 椭球，由 X 反求 B_f 可采用式(5-43)进行迭代求得，方法同上。

2. 高斯投影反算公式(结果以(°)为单位,精度为±0.01″)

由式(6-53)可得

$$
\left.\begin{aligned}
B^\circ &= B_f^\circ - \frac{1}{2}V_f^2 t_f\left[\left(\frac{y}{N_f}\right)^2 - \frac{1}{12}(5+3t_f^2+\eta_f^2-9\eta_f^2 t_f^2)\left(\frac{y}{N_f}\right)^4\right]\frac{180}{\pi} \\
l^\circ &= \frac{1}{\cos B_f}\left[\left(\frac{y}{N_f}\right) - \frac{1}{6}(1+2t_f^2+\eta_f^2)\left(\frac{y}{N_f}\right)^3 + \right. \\
&\quad \left.\frac{1}{120}(5+28t_f^2+24t_f^4)\left(\frac{y}{N_f}\right)^5\right]\frac{180}{\pi}
\end{aligned}\right\} \tag{6-60}
$$

式中,B_f 可用迭代法求得,方法如上所述,计算位数可相应减少。

根据上述方法与公式上机编程运算,输入部分算例的高斯平面坐标数据,计算结果如表 6-2所示(假定 6°带和 3°带均以第 20 带为中央子午线的投影带)。

表 6-2　高斯投影反算算例

已知数据/m	椭球参数	运算结果/(° ′ ″)	
		6°带	3°带
x=3 354 874.257 y=386.564 X=3 354 874.257 Y=20 500 386.564	克拉索夫斯基椭球	B=30 18 46.92	B=30 18 46.92
		L=117 00 14.47	L=60 00 14.47
	IUGG 1975 椭球	B=30 18 48.80	B=30 18 48.80
		L=117 00 14.47	L=60 00 14.47
	CGCS 2000 椭球	B=30 18 48.85	B=30 18 48.85
		L=117 00 14.47	L=60 00 14.47
x=532 548.378 y=−209.135 X=532 548.378 Y=20 499 790.865	克拉索夫斯基椭球	B=4 48 57.62	B=4 48 57.62
		L=116 59 53.21	L=59 59 53.21
	IUGG 1975 椭球	B=4 48 57.92	B=4 48 57.92
		L=116 59 53.21	L=59 59 53.21
	CGCS 2000 椭球	B=4 48 57.93	B=4 48 57.93
		L=116 59 53.21	L=59 59 53.21

注:表中 x、y 为自然坐标,X、Y 为通用坐标。

三、高斯坐标的邻带换算

(一)原理

为了限制高斯投影的长度变形,必须沿子午线进行分带。分带投影的结果,形成各带独立的平面直角坐标系。于是位于相邻两带的点就分属两个坐标系。如果把它们化为同一个坐标系,就需将一个带的高斯坐标换算为相邻带的高斯坐标,称为高斯坐标的邻带换算。

生产实践中有以下情况需要邻带换算:

(1)三角锁网分跨于不同的投影带,平差计算时,要将邻带的部分或全部坐标换算到同一带中;

(2)在投影带边缘地区测图时,往往需要用到另一带的三角点作为控制,因此必须将这些点换算到同一带中;

(3)大比例尺测图(1∶1 万及更大比例尺)要求采用 3°带,而国家控制点通常只有 6°带的坐标,因此还产生 3°带和 6°带相互之间的换算。

在推导出了高斯投影正、反算公式后,邻带换算问题就很容易解决了。邻带换算的基本方

法就是，首先按高斯投影反算公式，依据该点在Ⅰ带的高斯平面坐标 $(x,y)_{\mathrm{I}}$ 求得该点的大地坐标 (L,B)，然后再按高斯投影正算公式，以Ⅱ带的中央子午线经度 $(L_0)_{\mathrm{II}}$ 为准，算得该点在Ⅱ带的高斯平面坐标 $(x,y)_{\mathrm{II}}$ 。其过程可表示为

$$(x,y)_{\mathrm{I}} \xrightarrow[\text{高斯投影反算}]{(L_0)_{\mathrm{I}}} (L,B) \xrightarrow[\text{高斯投影正算}]{(L_0)_{\mathrm{II}}} (x,y)_{\mathrm{II}}$$

(二)3°带与6°带的坐标换算

由于我国采用3°带和6°带两种分带方法，因此在生产实践中还常常会遇到3°带和6°带间的坐标换算问题。下面以3°带坐标换算为6°带坐标为例讨论其坐标变换问题。

我们知道，3°带的中央子午线，在奇数带与6°带中央子午线重合，在偶数带与6°带分带子午线重合。因此3°带与6°带的坐标换算也分两种情况。

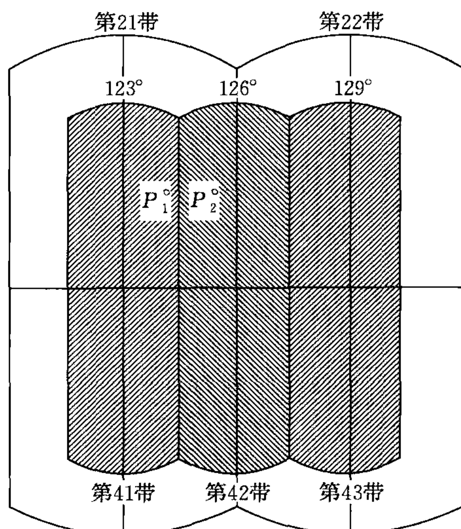


图 6-13 3°带与6°带坐标换算

1. 3°带中央子午线与6°带中央子午线重合

如图6-13所示，以123°经线为中央子午线的3°带第41带与6°带第21带的中央子午线重合。各投影带的坐标系不同是由于中央子午线的不同而造成的，二者的中央子午线一致了，它们的坐标系就是相同的。如果已知 P_1 在3°带第41带的坐标，求其在6°带第21带的坐标，则无须任何换算；反之亦然。

2. 3°带中央子午线与6°带分带子午线重合

如图6-13所示，3°带第42带的中央子午线与6°带第21带、第22带间的分带子午线重合。此时二者的坐标系不同。如果已知 P_2 点在3°带第42带的坐标欲求其在6°带第21带的坐标，则可以根据邻带换算的方法求出 P_2 点在3°带第41带的坐标，即可得到其在6°带第21带的坐标了。如果将6°带坐标化为3°带坐标，方法类同，不再重复。

(三)算例

具体算例可见表6-3。

表 6-3 3°带与6°带坐标换算算例 单位：m

3°带与6°带中央子午线重合		3°带中央子午线与6°带分带子午线重合	
3°带坐标	6°带坐标	3°带坐标	6°带坐标
X =3 858 520.694 6	X =3 858 520.694 6	X =3 858 853.567 1	X =3 860 592.247 9
Y =41 512 354.983 4	Y =21 512 354.983 4	Y =42 420 902.854 3	Y =21 695 272.932 5

注：表中 X、Y 为通用坐标。

§6-5 大地控制网元素归算至高斯平面

一、椭球面三角网至高斯平面的归算内容

根据第五章中关于地面观测元素归算至椭球面所介绍的方法，可以把野外的观测元素(水平方向、天顶距、地面长度、天文经纬度和天文方位角等)归算到椭球面上，然后进行大地解算，

从而就可以把由地面点构成的大地控制网化算成椭球面上由大地点构成的控制网了。然而由大地问题解算实践知，在椭球面上的大地解算非常复杂。此外，椭球面控制网也不能直接控制地形测图。为了满足控制地形测图及控制网计算简便的需求，需要利用高斯投影的方法进一步把椭球面上由大地线连接而成的三角网归算成平面上由直线段连接而成的平面三角网。下面具体分析这一归算过程应包含的计算内容。

首先介绍以下几个概念：

(1)真北方向和坐标北方向。所谓某点的真北方向就是指过该点的真子午线（大地子午线）北端所指的方向，即指向椭球北极的方向。坐标北方向则是指过高斯平面内一点平行于纵坐标轴的直线北端所指的方向。

(2)真方位角和坐标方位角。真方位角是指真子午线与大地线的夹角，即大地方位角。坐标方位角是指真北方向与平面上某一直线方向的夹角，从坐标北方向，顺时针量度为正。

(3)子午线收敛角。真北方向与坐标北方向间的夹角称为子午线收敛角，用 γ 表示。

如图 6-14 所示，设椭球面上有一三角网 $P_1P_2P_3P_4\cdots$，其中 P_1 为起算点，它的大地坐标为 (L_1,B_1)，P_1P_2 为起算边，它的边长（大地线长）为 S_{12}、起始大地方位角为 A_{12}，观测值为三角网各边的方向值。经高斯投影，中央子午线 ON 投影为纵坐标轴，即 x 轴、赤道 OE 投影为横坐标轴，即 y 轴，三角网 $P_1P_2P_3P_4\cdots$ 投影到平面上为 $P_1'P_2'P_3'P_4'\cdots$。由高斯投影正算知，除了中央子午线和赤道外，其他的子午线、平行圈及大地线均投影为曲线。因此，椭球面上由大地线连成的三角形各边投影后为相应的曲线（图中用虚线表示）。过 P_1 点的子午线 P_1N 投影为 $P_1'N'$，即真北方向，过 P_1' 作平行于纵坐标轴的直线 $P_1'L$，即坐标北方向。

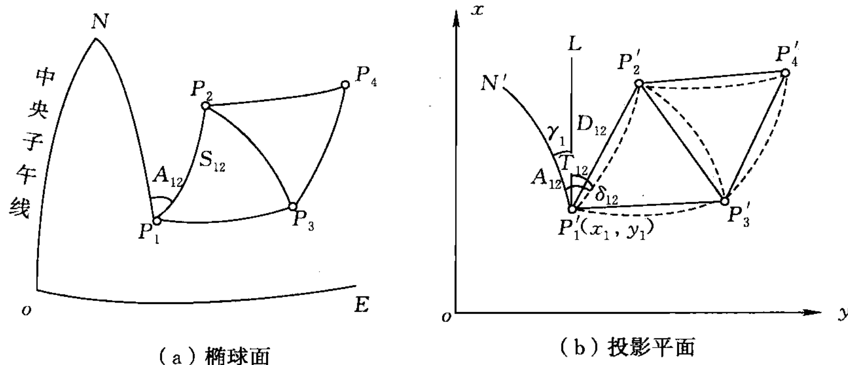


图 6-14　三角网的投影

因为高斯投影是正形投影，椭球面上三角形各角度投影后保持不变，所以高斯平面上由投影曲线（虚线）组成的各角等于椭球面上对应的各角。大地线在平面上的投影通常不是直线而是曲线，即图中的虚线，但在平面上用它们进行计算是极其困难的，为了满足平面计算的要求，应首先用连接各点间的弦线（图中实线表示）代替曲线。为此必须在每个方向上加一定的改正，将曲线的方向改化成相应直线的方向，即方向改正。之后就要把三角网中的已知元素化算到平面上。将起算点的大地坐标化成平面坐标，为了检核，还需将平面坐标化成大地坐标；然后，为了计算其他三角点的平面坐标，如要求 P_2' 的平面坐标（见图 6-14(b)）

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + D_{12}\cdot\cos T_{12} \\ y_2 &= y_1 + D_{12}\cdot\sin T_{12} \end{aligned}\right\}$$

还应该确定平面三角形各平面边长及其坐标方位角，如 D_{12} 和 T_{12} 等。

由上面的分析知，椭球面三角网归算到高斯平面，包括以下计算内容：

(1)将起算点 P_1 的大地坐标(L_1,B_1)，归算为相应投影点 P_1' 的高斯平面直角坐标(x_1,y_1)，即高斯投影正算；同时为了计算的检核，还应该进行高斯投影反算，亦即根据(x_1,y_1)反算(L_1,B_1)，正算和反算统称为高斯投影的坐标计算。

(2)将椭球面三角形的各内角，归算为相应直线组成的平面三角形的各内角。由于高斯投影的正形投影特性，此项计算内容实际上也就是将大地线投影曲线方向归算为它的弦线方向，即求投影曲线与弦线的夹角，即是方向改正或曲率改正，以 δ_{12}、δ_{13}… 表示。

(3)将椭球面上起算边 P_1P_2 的大地线长度 S_{12}，归算为相应投影边 $P_1'P_2'$ 的平面线段的长度 D_{12}，将大地线长归算为平面弦长所加的改正，称为距离改正，以 ΔS 表示。

(4)将椭球面上起始边 P_1P_2 的大地方位角 A_{12}，归算为相应投影边 $P_1'P_2'$ 的平面坐标方位角 T_{12}，称为坐标方位角的计算，是通过计算该点的子午线收敛角 γ 及方向改正 δ 实现的。

经过上述计算，就将平面上由曲线组成的曲边三角形改成为由直线组成的平面三角形了。于是三角形的解算和平面坐标的计算都可按平面三角公式进行，从而使计算大为简便。

由此可见，要将椭球面三角锁网归算到平面上，包括坐标换算、方向改正、距离改正、子午线收敛角和坐标方位角的计算等。坐标换算，即高斯投影正反算的内容，前面已经详细介绍过，下面分别讨论其余的计算内容。

二、方向改正

椭球面上的三角网是由大地线组成的，大地线在高斯平面上的投影是曲线，为了在平面上利用平面三角学公式进行计算，需把大地线的投影曲线用其弦线来代替，因而须将大地线方向化成平面弦线的方向。椭球面上两点间大地线方向归算至其平面上相应投影点间的弦线方向，所加的改正称为方向改正，以 δ_{ij} 表示。由于高斯投影的正形投影特性，大地线投影曲线的方向与原大地线方向一致，因此，方向改正也可理解为将大地线的投影曲线归算为相应两点间的弦线的过程，即求投影曲线与弦线的夹角。这个夹角是由于大地线投影曲线的弯曲而产生的，其大小和曲线曲率有关，所以又称曲率改正。

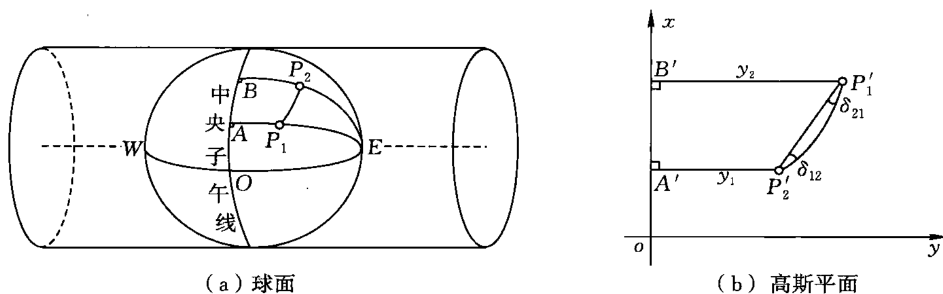
由上面的叙述可知，方向改正并不是由于投影变形造成的。之所以给每个观测方向值加方向改正，其根本原因还是在于平面计算的需要，是由曲线改化成便于平面计算的直线的这种“曲改直”的需求而造成。在三角测量中，大量的观测元素是方向，而每个方向都必须进行方向改正，因而方向改正计算的任务量是比较重的，而且它又是比较重要的一个环节。下面详细讨论适于不同精度要求时，方向改正的计算公式及应用。

高斯投影中的方向改正公式，其精度和形式随计算等级不同而不同。通常一等使用精密公式，二等使用较精密公式，三、四等使用近似公式。

(一)方向改正近似公式

如图 6-15(a)所示，将椭球近似为球，则大地线 P_1P_2 即为球面上的大圆弧，过 P_1、P_2 分别作正交于中央子午线的大圆弧 AP_1、BP_2，它们与赤道共同交于 E 点，ABP_2P_1 构成球面四边形。在图 6-15(b)中，大地线 P_1P_2 投影为曲线 $P'_1P'_2$。由于高斯投影的正形投影特性，大圆弧 AP_1 及 BP_2 投影为直线 $A'P'_1$ 及 $B'P'_2$，它们都垂直于 x 轴(因 E 点投影在无穷远处)。$A'B'P'_2P'_1$ 构成平面曲边四边形，其中 $P'_1P'_2$ 边为曲线。

设球面四边形的球面角超为 ε，大地线投影曲线 $P'_1P'_2$ 与其弦线 $\overline{P'_1P'_2}$ 的夹角为 δ_{12} 和 δ_{21}，



（a）球面　　（b）高斯平面

图 6-15　方向改正近似推导

因是正形投影，所以有

$$360^\circ + \varepsilon = 360^\circ + \delta_{12} + \delta_{21} \tag{6-61}$$

设 $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta$，则得

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

式中，$\varepsilon = \dfrac{P}{R^2}$。其中，$P$ 为球面四边形面积，因 ε 数值很小，P 可用平面四边形面积来代替。设 P'_1 和 P'_2 的平面坐标为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，则有

$$P = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 + x_1) = y_m(x_2 - x_1)$$

于是得

$$\delta = \frac{y_m}{2R_m^2}(x_2 - x_1) \tag{6-62}$$

式中，R_m 为两端点 P_1、P_2 中纬度 B_m 处的平均曲率半径。

由上面推导得到的只是方向改正的绝对值。但实际上，由于大地线的位置和方向不同，δ 的数值可能为正也可能为负。为符合"加改正"定义的习惯，使计算所得的 δ 是指加到观测方向上的改正数，我们必须顾及 δ 的符号。例如在图 6-17(b)中，因为方向观测值是顺时针方向增加的，由大地线方向 P_1P_2 归算至它的弦线方向 $\overline{P'_1P'_2}$ 时，其方向改正值 δ_{12} 的符号为负，同理由 P_2P_1 归算至 $\overline{P'_2P'_1}$ 时，其方向改正值 δ_{12} 的符号为正。以(″)表示之，得方向改正的近似公式是

$$\left.\begin{aligned} \delta''_{12} &= -\frac{\rho'' y_m}{2R_m^2}(x_2 - x_1) \\ \delta''_{21} &= \frac{\rho'' y_m}{2R_m^2}(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \tag{6-63}$$

该式的误差小于 0.1″，通常用于三等及其以下三角测量计算。

根据式(6-63)算出方向改正一些数值如表 6-4 所示。

表 6-4　方向改正的数值列表

(x_2-x_1)/km δ''_{12}/(″) y_m/km	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
100	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1	10.1
200	0.0	2.0	4.1	6.1	8.1	10.1	12.2	14.2	16.2	18.3	20.3
300	0.0	3.0	6.1	9.1	12.2	15.2	18.2	21.3	24.3	27.4	30.4

表中，$(x_2 - x_1)$ 大致与大地网的边长相当；y_m 大致为边距中央子午线的距离。由上表可以看出，对于各等三角测量计算，方向改正都不能忽略。

（二）方向改正精密公式

较精密公式的推导方法，多数文献都是采用近似公式作为微分方程，引入新坐标系和曲率半径公式，建立二阶微分方程，进而求解微分方程获解。它的推导比较烦琐，这里从略。

方向改正的较精密公式是

$$\left.\begin{aligned} \delta''_{12} &= -\frac{\rho''}{6R_m^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) \\ \delta''_{21} &= \frac{\rho''}{6R_m^2}(x_2 - x_1)(2y_2 + y_1) \end{aligned}\right\} \tag{6-64}$$

我国二等三角网平均边长为 13 km，当 $y_m < 250$ km 时，上式精确至 $0.01''$，常用于二等三角测量计算，若当 $y_m > 250$ km 时，则需用下面的精密公式计算

$$\left.\begin{aligned} \delta''_{12} &= -\frac{\rho''}{6R_m^2}(x_2 - x_1)\left(2y_1 + y_2 - \frac{y_m^3}{R_m^2} - \frac{\rho''\eta_m^2 t_m}{R_m^3}(y_2 - y_1)y_m\right. \\ \delta''_{21} &= \frac{\rho''}{6R_m^2}(x_2 - x_1)\left(2y_2 + y_1 - \frac{y_m^3}{R_m^2}\right) + \frac{\rho''\eta_m^2 t_m}{R_m^3}(y_2 - y_1)y_m \end{aligned}\right\} \tag{6-65}$$

上式精确至 $0.001''$，适用于一等三角测量计算。

（三）方向改正计算所需坐标的精度及检核公式

关于方向改正数值的计算，还须说明两点。

(1)计算方向改正的数值必须预先知道点的平面坐标。然而要精确知道点的平面坐标，却又要先算出方向改正值，所以这是一对矛盾，解决这个矛盾采用逐次趋近计算的方法。由于不同等级计算的精度要求不同，趋近次数也是不相同的，下面对所需的坐标精度作一定的分析。

由式(6-63)，求全微分得

$$\Delta\delta'' = \frac{\rho''}{2R_m^2}[y_m \cdot \Delta(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1) \cdot \Delta y]$$

设

$$\Delta(x_2 - x_1) = \Delta y = \Delta P$$

则有

$$\Delta\delta'' = \frac{\rho''}{2R_m^2} \cdot \Delta P \cdot [y_m + (x_2 - x_1)]$$

即

$$\Delta P = \frac{2R_m^2}{\rho''} \frac{\Delta\delta''}{y_m + (x_2 - x_1)}$$

在三角测量中，令 $\Delta\delta'' = 0.1''$，并设 $y = 350$ km，$x_2 - x_1 = 10$ km，则得 $\Delta P \approx 0.1$ km，由此可见，需将概略坐标计算到 0.1 km，即可满足三等方向改正计算的精度要求。同理，对于二等及一等来说，平面坐标精度分别满足 10 m 和 1 m 的精度就足够了。实事上，对于大量的三等三角测量来说，由于对概略坐标的精度不高，因此可不必进行趋近计算。

(2)在计算中，虽力求计算正确，但差错有时还是难免的。为了避免计算中的错误，必须找出检核方向改正计算正确性的公式。椭球面三角形内角之和为 $180° + \varepsilon$，正形投影至平面后由曲线组成的该三角形内角之和当然仍是 $180° + \varepsilon$。

下面给出方向改正计算中的检核公式。如图 6-16所示，曲线边三角形 $A'B'C'$ 为椭球面三角形 ABC 在高斯平面上的投影，设各角的角度改正为 δ_A、δ_B、δ_C，它们分别等于相邻两边的方向改正之差，即

$$\left.\begin{aligned}\delta_A &= \delta_{AC} - \delta_{AB} \\ \delta_B &= \delta_{BA} - \delta_{BC} \\ \delta_C &= \delta_{CB} - \delta_{CA}\end{aligned}\right\} \tag{6-66}$$

椭球面三角形内角和为 $180° + \varepsilon$，加上角度改正后，成为直边三角形，其内角和为 180°，即

$$180° + \varepsilon + (\delta_A + \delta_B + \delta_C) = 180°$$

图 6-16　方向改正检核

则

$$\varepsilon = -(\delta_A + \delta_B + \delta_C) \tag{6-67}$$

上式表明，每一三角形的球面角超，等于该平面三角形各内角的角度改正之和的反号。利用式(6-67)可以检核方向改正和球面角超计算的正确性。其不符值要求，二等不得大于 0.02″，三等及以下不得大于 0.2″。

(四)实用公式

精确至 0.001″公式是

$$\left.\begin{aligned}\delta''_{12} &= -\frac{\rho''}{6R_m^2}\left[(x_2 - x_1)\left(2y_1 + y_2 - \frac{y_m^3}{R_m^2} + \frac{6\eta_m^2 t_m}{R_m}(y_2 - y_1)y_m^2\right)\right] \\ \delta''_{21} &= -\delta''_{12} + \frac{\rho''}{6R_m^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\end{aligned}\right\} \tag{6-68}$$

例如，已知 x_1 = 3 602 547. 8 km，y_1 = 298 960. 0 km，x_2 = 3 584 223. 0 km，y_2 = 323 655. 4 km，B_m = 32°25. 5′，计算得 δ''_{12} = +14. 294″，δ''_{21} = −14. 678″。

检核

$$\sum\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 =$$

$$(16.430'' - 14.294'') + (-14.678'' - 2.577'') + (-2.523'' + 16.519'') = -1.123''$$

$$\varepsilon = +1.123''$$

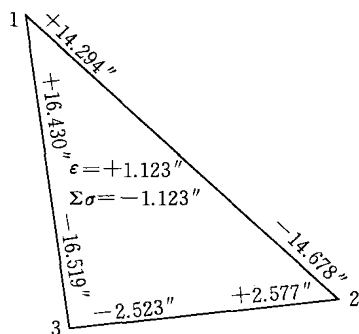


图 6-17　方向改正检核的实例

两者绝对值相等，说明计算正确，方向改正及其检核一般是在图中进行计算，如图 6-17 所示。由于舍入误差，有时两者可能相差 0. 001～0. 002″，经检查无误后，可在大角度上进行配赋。

三、距离改正

高斯投影是一种正形投影，没有角度变形。但除中央子午线外，均存在有长度变形。高斯投影的距离改正是与长度变形有关的，前面我们已经给出了长度比及长度变形的定义。下面我们导出长度比的具体数学解析式，来研究长度变形的规律、影响及限制变形的方法，进而导出距离改正公式。

(一)长度比公式

前已指出，投影平面上某点处的弧素 ds 与椭球面上相应弧素 dS 之比，称为该点处的长度比，即 $m=\frac{ds}{dS}$。鉴于正形投影的长度比与方向无关，因此在推求长度比公式时，可以选择任意的方向。在式(6-21)中，给出了两个特殊方向的长度比公式。其中，第一式是沿子午线方向的($l=$ 常数)，第二式是沿平行圈方向的($q=$ 常数)。结合高斯投影正算公式，对 l 求偏导数，得

$$m^2=\frac{G}{r^2}=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2}{N^2\cos^2B} \tag{6-69}$$

1. 由大地坐标(B,L)计算 m 的公式

由高斯投影正算公式(6-35)对 l 求偏导数得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial l}&=N\sin B\cos Bl+\frac{N}{6}\sin B\cos^3B(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4)l^3+\\&\quad\frac{N}{120}\sin B\cos^5B(61-58t^2+t^4)l^5\\\frac{\partial y}{\partial l}&=N\cos B+\frac{N}{2}\cos^3B(1-t^2+\eta^2)l^2+\\&\quad\frac{N}{24}\cos^5B(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2t^2)l^4\end{aligned}\right\} \tag{6-70}$$

式中，将求得的 $\frac{\partial x}{\partial l}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial l}$，略去 l^5 和 η^2l^3 项，除以 $N\cos B$，平方后可得

$$\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2}{N^2\cos^2B}=l^2\sin^2B+\frac{l^4}{3}\sin^2B\cos^2B(5-t^2)$$

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2}{N^2\cos^2B}=1+l^2\cos^2B(1-t^2+\eta^2)+\frac{l^4}{3}\cos^4B(2-6t^2+t^4)$$

上式代入式(6-69)，得

$$m=\left[1+l^2\cos^2B(1+\eta^2)+\frac{l^4}{3}\cos^4B(2-t^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

上式即为由大地坐标(B,l)计算长度比 m 的近似公式。如果在推导公式时再多顾及一项，则可以得到精度更高的长度比 m 的计算公式

按 $(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$ 展开上式得

$$m=1+\frac{l''^2}{2\rho''^2}\cos^2B(1+\eta^2)+\frac{l''^4}{24l''^4}\cos^4B(5-4t^2) \tag{6-71}$$

这就是用大地坐标表示的长度比公式。

2. 由高斯平面坐标(x,y)计算 m 的公式

由高斯投影正算公式(6-37)的第二式，略去 m^5 项，得

$$y=N\left[m+\frac{1}{6}(1-t^2+\eta^2)m^3\right]$$

式中，$m=l\cos B$。

根据级数回求公式，若

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

则

$$x = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_3} y^2 + \left(- \frac{a_3}{a_1^4} + 2 \frac{a_2^2}{a_1^5} \right) y^3 + \cdots$$

式中，$x = l\cos B; a_1 = N; a_2 = 0; a_3 = N(1 - t^2 + \eta^2)/6; a_4 = 0; \cdots$
故有

$$\frac{l''}{\rho''} \cos B = \frac{y}{N} - \frac{y^3}{6N^3}(1 - t^2 + \eta^2)$$

从而有

$$\frac{l''^2}{\rho''^2} \cos^2 B = \frac{y^2}{N^2} - \frac{y^4}{3N^4}(1 - t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{l''^4}{\rho''^4} \cos^4 B = \frac{y^4}{N^4}$$

代入式(6-71)，可得

$$m = 1 + \frac{y^2}{2N^2}(1 + \eta^2) + \frac{y^4}{24N^4} \tag{6-72}$$

顾及

$$\frac{1}{R^2} = \frac{V^2}{N^2} = \frac{1}{N^2}(1 + \eta^2)$$

代入上式，并以 R^4 代 N^4，于是得到用高斯平面坐标表示的长度比公式

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} \tag{6-73}$$

表 6-5 给出了长度比的大约数值

表 6-5　长度比的数值

y/km \ m \ B/(°)	20	30	40	50
50	1.000 031	1.000 031	1.000 031	1.000
100	1.000 124	1.000 123	1.000 123	1.000 123
200	1.000 494	1.000 493	1.000 492	1.000 491
300	1.001 112	1.001 110		
350	1.001 514			

(二)长度变形规律

某点长度比与 1 之差 $(m - 1)$，即为该点处的长度变形。式(6-71)或式(6-73)有助于进一步认识和分析高斯投影长度变形的规律。由此两式分析知：

(1)长度比 m 只与点的位置(B,l) 或(x,y) 有关，即 m 只是点位坐标的函数，只随点的位置不同而变化，在一点上与方向无关，这同正形投影条件是一致的。

(2)当 $y = 0$(或 $l = 0$) 时，$m = 1$，亦即在纵坐标轴(或中央子午线)上，各点的长度比 m 都等于 1，也就是说，中央子午线投影后长度不变，这同高斯投影本身的条件是一致的。

(3)当 $y \neq 0$(或 $l \neq 0$) 时，不论 y(或 l) 的值为正还是为负，亦即不论点在中央子午线之东还是之西，m 恒大于 1，这说明，不在中央子午线上的点，经高斯投影后长度均变长了。

(4)长度变形 $(m-1)$ 与 y^2(或 l^2) 成比例地增大,对于除中央子午线外的任一子午线来说,离开中央子午线愈远,则长度变形愈大。

(5)长度变形 $(m-1)$ 与 R^2 成比例地减小,而 R 又随 X(或 B) 的增大而增大,所以,在北半球随着纬度的升高长度变形逐渐减小(南半球的变化情况与北半球对称),即对于除中央子午线以外的某一子午线来说,在赤道处有最大的长度变形,而在极点处有最小的长度变形。结合第(4) 条可知,在一个投影带中,中央子午线上的长度变形最小(为 0),分带子午线与赤道交点处的长度变形最大。

长度变形是有害的,但它是客观存在的,不能违背这个规律使其完全消失。为此,在实际作业中,只好对长度变形加以适当的限制,使它在测图和用图时的影响很小,以至可以忽略。限制长度变形的方法,就是分带投影,分带方法在 § 6-4 中已经讨论过,这里从理论上进一步阐明了分带的必要性。

前已指出,我国投影分带主要有 6°带和 3°带两种。对于 1:2.5 万至 1:10 万比例尺的国家基本图采用 6°带,在 1:1 万和更大比例尺地形图,采用 3°带。鉴于长度变形的低纬度地区比较大的这一情况,在我国南部北纬 20°及其以南地区,在测图和用图时应该注意这种影响。例如,由式(6-73)知 $m-1=\frac{y^2}{2R^2}$,在北纬 20°位于 6°分带子午线附近的地区,其长度变形 $m-1$ 可达 $\frac{1}{820}$ 。这个数值是较大的,对于 1:2.5 万和 1:5 万图都不能忽视。例如,此时10 km 的边长将有 12.2 m 的长度变形。它在 1:2.5 万地图上约为 0.5 mm。通常我们要求图上的点位成图误差(不包括测量误差)小于 0.2 mm(即绘图误差)。因此在测图或用图中必须顾及这种影响。

对于 3°带,在纬度 20°及其以南地区,3°带的边缘长度变形仍达到 1/3 300。这一变形对于 1:5 000 及更大给比例尺的测图和用图来说仍然不能忽视,为此也必须加以相应的改正,或采用 1.5°带或局部的高斯直角坐标系(即选取测区中心的子午线作为投影的中央子午线),以使长度变形满足测图需要。

(三)距离改正公式

1. 公式推导

如图 6-18 所示,设 S 为椭球面上两点 P_1、P_2 间的大地线长,s 为高斯投影平面上相应两投影点 P_1'、P_2' 间的投影曲线长,D 为投影曲线 $P_1'P_2'$ 间的弦长。

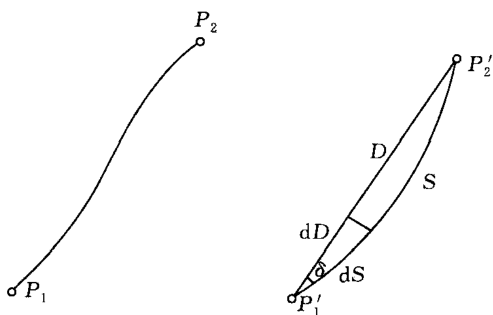


图 6-18 距离改正

将大地线长 S 归算为平面弦长 D 所加的改正,称为距离改正,以 ΔS 表示。

由于高斯投影的长度比在一般情况下恒大于1,因此有如下的关系

$$S < s > D$$

我们的目的是要得出 S 与 D 的关系。在推证过程中,先研究 S 与 s 的关系,然后再研究 s 与 D 的关系。最后导出距离改正 ΔS 的计算公式。

由长度比的定义有

$$ds = m dS$$

积分之,得

$$S=\int_{P_1}^{P_2} m\mathrm{d}S=\int_0^S m\mathrm{d}S$$

式中,m 随点的位置而变。但是当投影区域不大时,它的变化是很缓慢的。例如,当 $y=300\ \text{km}$,P_1、P_2 两点纬差达 $1°$ 时,两点长度比之差小于 4×10^{-7}。因此利用近似积分方法可以获得满意的精度。现按辛普森近似积分公式,将积分区间分为两段,每段长各为$\frac{S}{2}$,则有

$$s=\frac{S}{6}(m_1+4m_m+m_2) \tag{6-74}$$

式中,m_1、m_2 分别为 P_1 及 P_2 点的长度比;m_m 为大地线中点的长度比。

现在推导 s 与 D 的关系,如图 6-19 所示,曲线 $P_1'P_2'$ 为大地线 P_1P_2 的投影曲线,近似为圆弧形,O 为圆弧的圆心,F 为圆弧的中点,δ 表示曲率改正,于是 $\angle P'_1OF$ 也为 δ,因而有如下关系

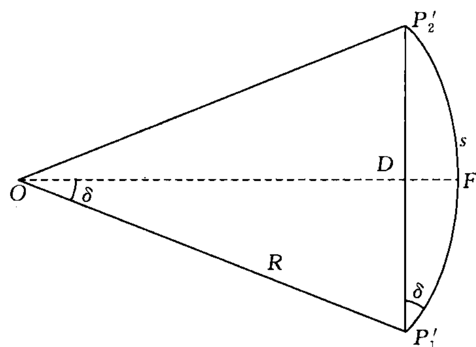


图 6-19　s 与 D 的关系

$$\sin\delta=\frac{\frac{D}{2}}{R}=\frac{D}{2R},\quad R=\frac{s}{2\delta}$$

由上两式可得

$$D=\frac{s\sin\delta}{\delta}$$

$$\sin\delta=\delta-\frac{\delta^3}{3!}+\frac{\delta^5}{5!}-\frac{\delta^7}{7!}+\cdots$$

取 $\delta=30''=0.000\,15\ \text{rad}$,$s=40\ \text{km}$,则 $\frac{\delta^2}{3!}s=0.15\ \text{mm}$,一等三角边长要求计算至毫米,故该项及更高阶项均可以略去,所以在计算中可视

$$D=s \tag{6-75}$$

将式(6-74)中 s 换成 D 得

$$D=\frac{S}{6}(m_1+4m_m+m_2) \tag{6-76}$$

又按式(6-73)有

$$m_1=1+\frac{y_1^2}{2R_1^2}+\frac{y_1^4}{24R_1^4}$$

$$m_m=1+\frac{y_m^2}{2R_m^2}+\frac{y_m^4}{24R_m^4}$$

$$m_2=1+\frac{y_2^2}{2R_2^2}+\frac{y_2^4}{24R_2^4}$$

代入式(6-76),并将 $\frac{1}{R_1^2}$ 及$\frac{1}{R_2^2}$ 以$\frac{1}{R_m^2}$ 近似替换得

$$D=\frac{S}{6}\left(6+\frac{y_1^2}{2R_m^2}+4\frac{y_m^2}{2R_m^2}+\frac{y_2^2}{2R_m^2}+\frac{y_1^4}{24R_m^4}+4\frac{y_m^4}{24R_m^4}+\frac{y_2^4}{24R_m^4}\right)$$

设

$$y_m=\frac{y_1+y_2}{2},\quad \frac{\Delta y}{2}=\frac{y_2-y_1}{2}$$

则

$$y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2}, \quad y_2 = y_m + \frac{\Delta y}{2}$$

$$y_1^2 + y_2^2 = 2y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{2}$$

又因 y^4 项甚小，故以 $y_m^4 = \frac{y_1^4 + y_2^4}{2}$ 代之，于是可得

$$D = S\left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4}\right) \tag{6-77}$$

即

$$\Delta S = D - S = S\left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4}\right) \tag{6-78}$$

上式就是高斯投影的距离改正公式。当 $S < 70$ km、$y_m < 350$ km 时，该式误差小于 0.001 m，故该式适用于一等测量计算。

对于二等测量计算，可将上式的末项去掉，即

$$\Delta S = D - S = S\left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2}\right) \tag{6-79}$$

对于三等测量计算，仅取第一项即可

$$\Delta S = D - S = \frac{y_m^2}{2R_m^2}S \tag{6-80}$$

从以上公式看出：$y = 0$ 时，$\Delta S = 0$，即中央子午线上距离改正为零；当 $y \neq 0$ 时，$\Delta S > 0$，即离开中央子午线，距离改正恒为正值。当 $y_m = 300$ km，$S = 5$ km，取 $R_m = 6\,400$ km，则经过距离改正计算可得 $\Delta S = 6$ m。可见距离改正在各等级测量计算中都不容忽略。

顺便指出，欲要将平面弦长 D 化为大地线长 S，则有

$$S = D - \Delta S \tag{6-81}$$

2. 距离改正计算所需坐标的精度

为了计算距离改正，就要知道点的平面坐标。由于距离改正的数值不大，对点的坐标精度的要求不高，只要知道坐标的近似值就可。下面分析坐标要求精确的程度。

由式(6-80)可得

$$\Delta(D - S) = \frac{2y_m}{2R_m^2}S\Delta y$$

即

$$\Delta y = \frac{R_m^2}{y_m S}\Delta(D - S)$$

设 $y_m = 350$ km，$S = 50$ km，取 $R_m = 6\,400$ km，对于一等测量计算，令 $\Delta(D - S) = 0.001$ m，则得 $\Delta y = 2.34$ m；同时可以得出，对于二、三等测量计算，Δy 分别为 23.4 m 和 234 m。因此，坐标概略到 1 m、10 m，就能分别满足一、二、三等测量计算的要求。大量计算中，为防止坐标积累误差，往往将概略坐标计算到 0.1 m，1 m 和 10 m。这种概略坐标精度，同样可以满足同等级方向改正的测量计算要求。

3. 实用公式

现给出精确至 0.001 m 的实用公式

$$D = S\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\Delta y}{R_m}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^4\right] \tag{6-82}$$

式中，$R_m = \dfrac{C}{1 + e'^2\cos^2 B_m}$。如果 B_m 未知，可取 $X = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$ 按由子午线弧长反求纬度的公式求出 B_m。

例如：已知 $y_1 = 269\ 759.6$ km，$y_2 = 297\ 219.7$ km，$B_m = 31°27'$，$S = 34\ 862.820$ km 算得 $D = 34\ 897.394$ km。

或：已知 $x_1 = 3\ 496\ 205.1$ km，$y_1 = 269\ 759.6$ km，$x_2 = 3\ 474\ 669.9$ km，$y_2 = 297\ 219.7$ km，$S = 34\ 862.820$ km 算得 $D = 34\ 897.394$ km。

四、平面子午线收敛角

在计算坐标方位角时，需用到平面子午线收敛角，下面导出其计算公式。

在高斯投影平面上，如图 6-20 所示，过 P' 点的子午线投影曲线 $P'N'$（$l =$ 常数的曲线）与纵坐标线 $P'L$ 间的夹角，亦即真北方向与坐标北方向的夹角，称为高斯平面子午线收敛角，通常用 γ 表示。从子午线投影曲线量至纵坐标线，顺时针方向为正，逆时针方向为负。因为高斯投影为正形投影，故子午线与平行圈投影后（即 $P'N'$ 与 $P'E'$ 曲线）仍正交，于是 $P'E'$ 与横坐标线 $P'R$ 间的夹角亦为 γ。平面子午线收敛角用于大地方位角和平面坐标方位角间的相互换算。平面子午线收敛角可由大地坐标（L,B）计算，也可由平面坐标（x,y）计算。下面分别推导它们的公式。

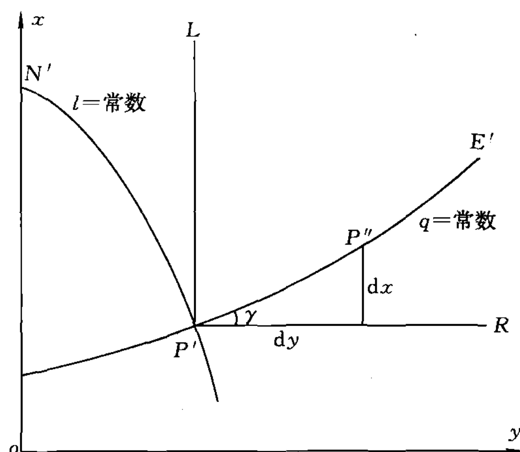


图 6-20　平面子午线收敛角

（一）由大地坐标（L,B）计算 γ 的公式

设想点 P' 沿平行圈投影曲线移至 P'' 处，此时坐标增量为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$，由图 6-20 可得

$$\tan\gamma = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

一般情况下，由式(6-23)取全微分得

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial x}{\partial l}\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial y}{\partial l}\mathrm{d}l$$

因 P' 移至 P'' 是沿平行圈方向，即 $q =$ 常数，故此时 $\mathrm{d}q = 0$，于是

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial l}\mathrm{d}l\\ \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial l}\mathrm{d}l\end{aligned}\right\}$$

因此有

$$\tan\gamma = \frac{\frac{\partial x}{\partial l}}{\frac{\partial y}{\partial l}} \tag{6-83}$$

将式(6-70)代入上式中，经整理后得

$$\tan\gamma = \sin B \cdot l + \frac{1}{3}\sin B\cos^2 B(1+t^2+3\eta^2+2\eta^4)l^3 + \frac{1}{15}\sin B\cos^4 B(2+4t^2+2t^4)l^5$$

设

$$\tan\gamma = x$$

则

$$\gamma = \tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \tan\gamma - \frac{1}{3}\tan^3\gamma + \frac{1}{5}\tan^5\gamma + \cdots$$

得

$$\gamma'' = l''\sin B\left[1 + \frac{l''^2\cos^2 B}{3\rho''^2}(1+3\eta^2+2\eta^4) + \frac{l''^4\cos^4 B}{15\rho''^4}(2-t^2)\right] \tag{6-84}$$

上式即为由大地坐标 (L,B) 计算平面子午线收敛角 γ 的公式。由上式可知：

(1) 当 $l=0$ 时，$\gamma=0$，当 $B=0$ 时，$\gamma=0$。即在中央子午线上和在赤道上，子午线收敛角均为 0；

(2) γ 为 l 的奇次函数，当 P 点在中央子午线以东时，l 为正，则 γ 也为正，当 P 点在中央子午线以西时，l 为负，则 γ 也为负；

(3) 当纬度 B 不变时，P 点与中央子午线的经差 l 愈大，则 γ 值也愈大；

(4) 当 l 不变时，纬度愈高，则 γ 值也愈大，在极点处 γ 最大。

式(6-84)在 $l \leqslant 3.5°$ 时，可精确至 0.001″，当 $l \leqslant 2°$ 时，l^5 项小于 0.001″。可略去。

(二) 由平面坐标(x,y)计算 γ 的公式

由平面坐标 (x,y) 计算子午线收敛角的公式可直接用式(6-84)变化求得。在式(6-84)中把 l 换以直角坐标，把 B 换以 B_f 即得。下面我们推求至 y^3 项的公式。

B 换以 B_f 的方法是用泰勒级数将 $\sin B$ 展开，即

$$\sin B = \sin[B_f - (B_f - B)] = \sin B_f - \cos B_f(B_f - B) - \cdots$$

式中，$(B_f - B)$ 由式(6-53)中第一式取主项有

$$(B_f - B) = \frac{t_f}{2M_f N_f}y^2 = \frac{t_f}{2N_f^2}y^2(1+\eta_f^2)$$

代入得

$$\sin B = \cos B_f\left[t_f - \frac{t_f}{2N_f^2}y^2(1+\eta_f^2) - \cdots\right] \tag{6-85}$$

l 换以直角坐标采用式(6-53)中第二式，即

$$\left.\begin{aligned} l''\cos B_f &= \frac{\rho''}{N_f}y - \frac{\rho''}{6N_f^3}y^3(1+2t_f^2+\eta_f^2) + \cdots \\ l''\cos^2 B_f &= \frac{\rho''^2}{N_f^2}y^2 - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-86}$$

将式(6-85)和式(6-86)代入式(6-84)，略去 $l^3\eta^4$ 以上的项得

$$\gamma'' = \left[\frac{\rho''}{N_f}y - \frac{\rho''}{6N_f^3}y^3(1+2t_f^2+\eta_f^2)\right]\cdot\left[t_f - \frac{t_f}{2N_f^2}y^2(1+\eta_f^2)\right]\cdot\left[1+\frac{1}{3N_f^2}y^2(1+3\eta_f^2)\right] =$$

$$\frac{\rho'' y}{N_f}t_f - \frac{\rho'' y^3}{6N_f^3}t_f(1+2t_f^2+\eta_f^2) - \frac{\rho'' y^3}{2N_f^3}t_f(1+\eta_f^2) + \frac{\rho'' y^3}{3N_f^3}t_f(1+3\eta_f^2)$$

最后得

$$\gamma'' = \frac{\rho'' y}{N_f}t_f - \frac{\rho'' y^3}{3N_f^3}t_f(1+t_f^2-\eta_f^2) \tag{6-87}$$

如将公式推求至 y^5，则有

$$\gamma'' = \frac{\rho'' y}{N_f}t_f - \frac{\rho'' y^3}{3N_f^3}t_f(1+t_f^2-\eta_f^2) + \frac{\rho'' y^5}{15N_f^5}t_f(2+5t_f^2+3t_f^4) \tag{6-88}$$

由式(6-87)计算 γ 精度可达 1″，由式(6-88)计算 γ 精度可达 0.001″。式中有下标“f”的，其意义同高斯投影反算公式，表示由底点纬度算得。

(三)实用公式

式(6-84)和式(6-88)均可作为计算机编程的实用公式，其精度为 0.001″。对于式(6-88)中的 B_f 值，可按 $x = X$，根据迭代公式或直接公式算得。要使精度达到 0.000 1″，可将式(6-88)的级数项继续扩充，直接写出结果如下

$$\gamma'' = \frac{\rho'' y}{N_f}t_f - \frac{\rho'' y^3}{3N_f^3}t_f(1+t_f^2-5\eta_f^2) + \frac{\rho'' y^5}{15N_f^5}t_f(2+5t_f^2+3t_f^4+2\eta_f^2+\eta_f^2 t_f^2)$$

例如，已知 $L = 113°50'26.268''$，$B = 31°33'22.293''$，按式(6-84)计算得 $\gamma = +1°29'14.992''$。

又已知 $x = 3\,496\,205.167$ m，$y = 269\,759.797$ m，按式(6-88)计算得 $\gamma = +1°29'14.992''$。

五、坐标方位角的计算

如图 6-21 所示，曲线 $P_1'N'$ 与直线 $P_1'L$ 的夹角为 P_1' 点的平面子午线收敛角 γ_1，$P_1'L$ 与 $\overline{P_1'P_2'}$ 弦线夹角为 P_1' 点在 $P_1'P_2'$ 方向的平面坐标方位角 T_{12}。由于高斯投影是正形投影，所以在平面上 $P_1'N'$ 与投影曲线 $\widehat{P_1'P_2'}$(虚线)的夹角和投影前椭球面上 P_1N 与 P_1P_2 的夹角相等，即大地方位角 A_{12}。由图 6-21 的关系可得

$$T_{12} = A_{12} - \gamma_1 - |\delta_{12}|$$

由前可知，为符合“加改正”定义的习惯，实际图 6-22中的方向改正 δ_{12} 为负号，对上式应做改化，故由 A_{12} 求 T_{12} 按下式计算

$$T_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12} \tag{6-89}$$

椭球面三角网归算到高斯平面时，在起算边上需要按式(6-89)计算坐标方位角，而大地方位角 A_{12}，按拉普拉斯方位角公式(5-67)，由实测天文方位角 α_{12} 求得，即

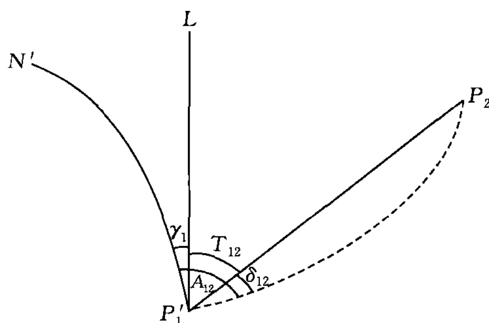


图 6-21　坐标方位角的计算

$$A_{12} = \alpha_{12} - (\lambda_1 - L_1)\sin\varphi_1$$

综合以上两式得

$$T_{12} = \alpha_{12} - (\lambda_1 - L_1)\sin\varphi_1 - \gamma_1 + \delta_{12} \tag{6-90}$$

所以，坐标方位角的计算，实质上是天文方位角化算为坐标方位角。式(6-90)中 λ_1、L_1 为 P_1 点的天文经度和大地经度，γ_1 为 P_1 点的子午线收敛角，用 P_1 点的大地经纬度(L_1，B_1)按

式(6-84)或用 P_1 点的平面坐标(x_1,y_1)按式(6-88)算得。

式(6-90)即是由天文方位角计算平面坐标方位角的计算公式。

经过本节介绍的计算过程,就可以将一个椭球面上由大地线连接而成三角网归化为平面上由点间的线段构成的平面三角网了。接下来就可以在平面上进行网的平差计算了。

第七章　大地坐标系的建立

为了描述一个事件的状态，需指明以什么作为参考。在大地测量中，除了选择参考物外，还需要进行空间定位定向并规定度量单位（如时间尺度、空间尺度等），于是我们在地球上建立了参考坐标系（也称为参考系或坐标系，这里我们将这些概念理解为同义词）。就大地测量应用而言，坐标系的选取完全是人为的，从数学观点看，并没有理由评价坐标系的优劣，但从物理和实用的观点来看，应视研究问题的可行和方便选取合理的参考系。

本章讨论了经典大地坐标系和现代大地坐标系的建立原理，建立了不同大地坐标系间的转换模型，并介绍了国际上的大地坐标系和我国的大地坐标系。

§7-1　大地坐标系中的欧勒角

一、用矢量分析法讨论坐标转换问题

如图 7-1 所示，设有两个空间直角坐标系，分别为 $O—XYZ$ 和 $O—X'Y'Z'$，我们只讨论坐标的旋转变换，故设其原点相同。$O—X'Y'Z'$ 的各坐标轴 OX'、OY'、OZ' 对 $O—XYZ$ 对各坐标轴 OX、OY、OZ 的方向角分别为 α_1、β_1、γ_1；α_2、β_2、γ_2；α_3、β_3、γ_3。

设空间一点 M 对 $O-XYZ$ 的矢径用 $\boldsymbol{r}$ 表示，对于 $O-X'Y'Z'$ 的矢径用 $\boldsymbol{r}'$ 表示，显然

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$$

应用它们的分量表示式，上式变为

$$X'\boldsymbol{i}' + Y'\boldsymbol{j}' + Z'\boldsymbol{k}' = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \quad (7\text{-}1)$$

式中，$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 为 $O-X'Y'Z'$ 的基本单位矢量；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为 $O-XYZ$ 的基本单位矢量；X'、Y'、Z' 与 X、Y、Z 分别为 $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的分量。

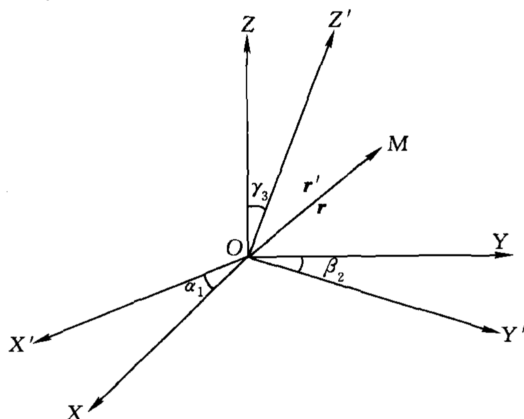


图 7-1　方向角

以点 $\boldsymbol{i}'$ 乘式(7-1)的两端，再以点 $\boldsymbol{j}'$、点 $\boldsymbol{k}'$ 依次乘式(7-1)的两端，得

$$X' = X\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{k}$$
$$Y' = X\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{k}$$
$$Z' = X\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k}$$

由两矢量的数量积定义知

$$\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i} = \cos(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{i}) = \cos\alpha_1$$
$$\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j} = \cos(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}) = \cos\beta_1$$
$$\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{k} = \cos(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{k}) = \cos\gamma_1$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k} = \cos(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) = \cos\gamma_3$$

于是上式可改写为

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{7-2}$$

式中的系数称为变换系数。由于系数阵中第一、二、三行分别为 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 在 $O-XYZ$ 中的坐标，而 $\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i}'=1$，$\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{j}'=1$，$\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}'=1$，$\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}'=0$，$\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{k}'=0$，$\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{k}'=0$，于是式(7-2)中的9个方向角，要满足以下6个关系式

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1 \\ &\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1 \\ &\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1 \\ &\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0 \\ &\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0 \\ &\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0 \end{aligned}\right\} \tag{7-3}$$

从理论上说，9个方向角仅有3个是独立的。也就是说，可以用其中任意3个独立的方向角来表示其余6个方向角。在本章研究椭球定位和不同坐标系的转换时，我们关心的是相应坐标轴之间的夹角，因此选择 α_1（两个 X 轴间的夹角）、β_2（两个 Y 轴间的夹角）和 γ_3（两个 Z 轴间的夹角）。其中特别是 β_2 和 γ_3 是我们最关心的，因为 Z、Z' 轴分别和各自椭球的短轴重合，γ_3 即表示两个椭球短轴不平行所夹的角；ZOX、$Z'OX'$ 分别为各自的起始大地子午面，β_2 即表示两个起始大地子午面不平行所夹的角。

二、以欧勒角为旋转参数的坐标变换

直接选择 α_1、β_2 和 γ_3 作为独立的方向角，公式十分冗长，为此，选择另外3个互相独立的参数来表示所有的方向角。这3个参数是围绕坐标轴依次旋转的3个角，就是所谓欧勒角。欧勒角和两个空间直角坐标系相应轴间的夹角的含义不同，但它们间构成一定的解析关系式。用于大地坐标系问题研究时的欧勒角，称为大地坐标系中的欧勒角，也称为旋转参数。

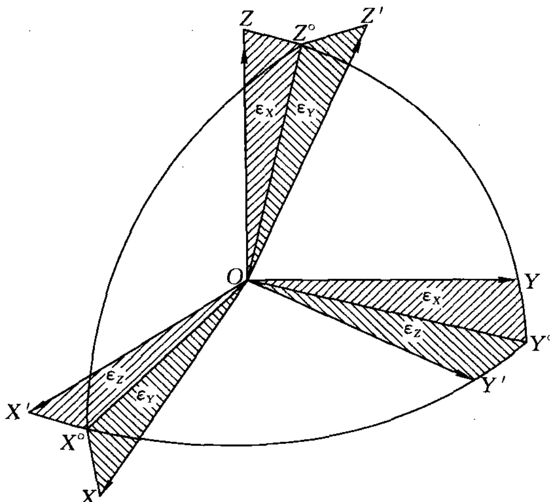


图 7-2 欧勒角

常用的欧勒角的表示如图7-2所示，选择 ε_X、ε_Y、ε_Z 为欧勒角，坐标系的旋转过程如下：

首先，绕 OZ' 轴，将 OX' 轴旋转到 OX° 轴，相应的 OY' 轴旋转到 OY°，所转的角为 ε_Z；

其次，绕 OY° 轴，将 OZ' 轴旋转到 OZ° 轴，相应的 OX° 轴旋转到 OX，所旋的角为 ε_Y；

最后，绕 OX 轴，将 OZ° 轴旋转到 OZ 轴，相应的 OY° 轴旋转到 OY，所旋的角为 ε_X。

因此有

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_X(\varepsilon_X)\boldsymbol{R}_Y(\varepsilon_Y)\boldsymbol{R}_Z(\varepsilon_Z)\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \tag{7-4}$$

式中，$\boldsymbol{R}_X(\varepsilon_X)$、$\boldsymbol{R}_Y(\varepsilon_Y)$ 和 $\boldsymbol{R}_Z(\varepsilon_Z)$ 为旋转矩阵，其表达式是

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_X(\varepsilon_X) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_X & \sin\varepsilon_X \\ 0 & -\sin\varepsilon_X & \cos\varepsilon_X \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{R}_Y(\varepsilon_Y) &= \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Y & 0 & -\sin\varepsilon_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varepsilon_Y & 0 & \cos\varepsilon_Y \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{R}_Z(\varepsilon_Z) &= \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Z & \sin\varepsilon_Z & 0 \\ -\sin\varepsilon_Z & \cos\varepsilon_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{7-5}$$

将式(7-5)代入式(7-4)，得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Y\cos\varepsilon_Z & \cos\varepsilon_Y\sin\varepsilon_Z & -\sin\varepsilon_Y \\ -\cos\varepsilon_X\sin\varepsilon_Z + \sin\varepsilon_X\sin\varepsilon_Y\cos\varepsilon_Z & \cos\varepsilon_X\cos\varepsilon_Z + \sin\varepsilon_X\sin\varepsilon_Y\sin\varepsilon_Z & \sin\varepsilon_X\cos\varepsilon_Y \\ \sin\varepsilon_X\sin\varepsilon_Z + \cos\varepsilon_X\sin\varepsilon_Y\cos\varepsilon_Z & -\sin\varepsilon_X\cos\varepsilon_Z + \cos\varepsilon_X\sin\varepsilon_Y\sin\varepsilon_Z & \cos\varepsilon_X\cos\varepsilon_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \tag{7-6}$$

当 ε_X、ε_Y、ε_Z 很小时，可忽略二阶小量，即有

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\varepsilon_X = \cos\varepsilon_Y = \cos\varepsilon_Z = 1 \\
&\sin\varepsilon_X = \varepsilon_X, \sin\varepsilon_Y = \varepsilon_Y, \sin\varepsilon_Z = \varepsilon_Z \\
&\sin\varepsilon_X\sin\varepsilon_Y = \sin\varepsilon_Y\sin\varepsilon_Z = \sin\varepsilon_Z\sin\varepsilon_X = 0
\end{aligned}\right\}$$

则式(7-6)可写成

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \tag{7-7}$$

式中系数阵也称为微分旋转矩阵。比较式(7-2)和式(7-6)可得

$$\left.\begin{aligned}
\cos\gamma_3 &= \cos\varepsilon_X\cos\varepsilon_Y \\
\cos\beta_2 &= \cos\varepsilon_X\cos\varepsilon_Z + \sin\varepsilon_X\sin\varepsilon_Y\sin\varepsilon_Z \\
\cos\alpha_1 &= \cos\varepsilon_Y\cos\varepsilon_Z
\end{aligned}\right\} \tag{7-8}$$

略去式(7-8)中 ε_X、ε_Y、ε_Z 互乘积的三次以上微小项，可得

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_3 &= \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2} \\
\beta_2 &= \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Z^2} \\
\alpha_1 &= \sqrt{\varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2}
\end{aligned}\right\} \tag{7-9}$$

三、广义垂线偏差公式和广义拉普拉斯方位角公式

§5-5 中在满足椭球短轴与地轴平行、起始大地子午面与起始天文子午面平行的条件下，我们推导了如下的垂线偏差公式和拉普拉斯方位角公式

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \varphi - B \\
\eta &= (\lambda - L)\cos\varphi
\end{aligned}\right\}$$

$$A = \alpha - (\lambda - L)\sin\varphi = \alpha - \eta\tan\varphi$$

当椭球短轴和地球某一历元地轴不平行、起始大地子午面和起始天文子午面不平行时，将

存在欧勒角 ε_X、ε_Y、ε_Z，此时以上公式中将引入相应的改正项。

下面我们不加推导地给出当存在 ε_X、ε_Y、ε_Z 时的垂线偏差公式和拉普拉斯方位角公式

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \varphi - B + \sin\lambda\varepsilon_X - \cos\lambda\varepsilon_Y \\ \eta &= (\lambda - L)\cos\varphi - \cos\lambda\sin\varphi\varepsilon_X - \sin\lambda\sin\varphi\varepsilon_Y + \cos\varphi\varepsilon_Z\end{aligned}\right\} \tag{7-10}$$

$$A = \alpha - \eta\tan\varphi - (\varepsilon_Y\sin\lambda + \varepsilon_X\cos\lambda)\sec\varphi \tag{7-11}$$

式(7-10)称为广义垂线偏差公式，式(7-11)称为广义拉普拉斯方位角公式。

§7-2 不同大地坐标系的转换

一、不同大地空间直角坐标系的转换

由于大地坐标系建立时所采用的资料、模型、参数和处理方法等的不同，会产生不同的大地坐标系。实践中，常常需解决不同坐标系的统一问题。

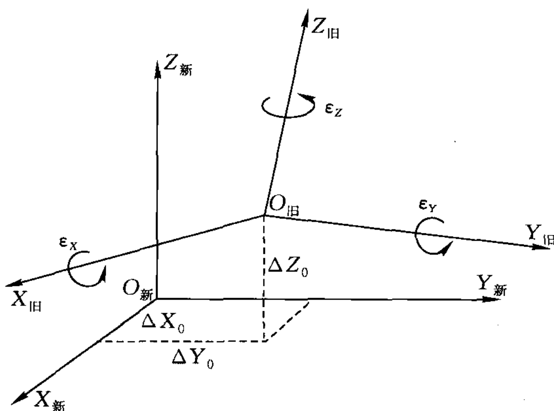


图 7-3 大地空间直角坐标系的转换

如图 7-3 所示，$O_新-X_新Y_新Z_新$ 和 $O_旧-X_旧Y_旧Z_旧$ 分别为两个大地空间直角坐标系，它们的坐标原点不相一致，即存在三个平移参数 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0，表示旧坐标系原点相对于新坐标系原点在三个坐标轴上的分量；两坐标系的各坐标轴相互不平行，即存在三个欧勒角 ε_x、ε_y、ε_z（称为三个旋转参数）。显然，这两个坐标系通过平移和旋转变换可取得一致。根据式(7-7)可得

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_新 = \begin{bmatrix}\Delta X_0\\\Delta Y_0\\\Delta Z_0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y\\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X\\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_旧 \tag{7-12}$$

由于种种原因，两坐标系在建立过程中还会存在尺度的差异。设 $S_新$、$S_旧$ 是空间同一距离在新、旧坐标系中的度量，则定义 $m = \dfrac{S_新 - S_旧}{S_旧}$ 为两坐标系的尺度比。这里，m 是均匀的，与点位和方向无关。于是对旧坐标值应按新坐标系的尺度作如下改进：$X = X_旧 + mX_旧$，$Y = Y_旧 + mY_旧$，$Z = Z_旧 + mZ_旧$。

在式(7-12)中顾及尺度比影响，实际上就是对 $(X、Y、Z)^T_旧$ 按以上关系进行改进，即

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_新 = \begin{bmatrix}\Delta X_0\\\Delta Y_0\\\Delta Z_0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y\\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X\\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_旧 + mX_旧\\Y_旧 + mY_旧\\Z_旧 + mZ_旧\end{bmatrix}$$

忽略二阶小量，并整理得

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_新 = (1+m)\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_旧 + \begin{bmatrix}0 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y\\ -\varepsilon_Z & 0 & \varepsilon_X\\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_旧 + \begin{bmatrix}\Delta X_0\\\Delta Y_0\\\Delta Z_0\end{bmatrix} \tag{7-13}$$

上式称为布尔莎模型。式中,共有7个转换参数 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0、ε_X、ε_Y、ε_Z、m,以此为参数的线性方程为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{新} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{旧} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{旧} & Y_{旧} & X_{旧} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{旧} & 0 & -X_{旧} & Y_{旧} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{旧} & X_{旧} & 0 & Z_{旧} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \\ \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ m \end{bmatrix} \tag{7-14}$$

在式(7-13)中,如 $\varepsilon_X = \varepsilon_Y = \varepsilon_Z = 0, m = 0$,则称为三参数公式,表示两个大地空间直角坐标系尺度一致且各坐标轴相互平行。同样,在式(7-13)中,略去某些参数,可分别得四参数、五参数和六参数转换公式。

为了求得式(7-14)中的7个转换参数,至少需要3个具有新、旧两套坐标的点(称为公共点),按平差原理解算。

由于公共点的坐标精度、公共点的点数和几何分布等因素对求解的转换参数均有影响,实践中应选择一定数量、精度较高且分布较均匀并有较大覆盖面的公共点。

式(7-14)以新、旧坐标差为观测量进行平差计算后,将得到观测量的改正数,表明对公共点旧坐标按式(7-14)转换得到的新坐标与已知新坐标值不完全相同。而在实际工作中又常常要求所有的已知点坐标值保持固定不变。为了解决这一矛盾,可将公共点的转换值改正为已知值,而对非公共点的转换值进行相应的配置。即按如下公式采用加权平均数计算非公共点转换值的改正数

$$V' = \frac{\sum_{1}^{n} p_i v_i}{\sum_{1}^{n} p_i}$$

式中,n 为公共点的个数;p_i 为第 i 个公共点的权,根据非公共点与公共点的距离(S_i)来确定,可取 $p_i = \frac{1}{S_i^2}$;v_i 为第 i 个公共点坐标值的改正数,即 v_i = 已知值 − 转换值,公共点的坐标采用已知值。

二、不同大地坐标系的转换

前已指出,不同大地空间直角坐标系的转换公式一般涉及7个参数,即3个平移参数、3个旋转参数和1个尺度变化参数。对于不同大地坐标系的换算,还应增加2个转换参数,这就是两种大地坐标系所对应的地球椭球参数的不同。不同大地坐标系的转换公式,又称为大地坐标微分公式或变换椭球微分公式。当包括旋转参数和尺度变化参数时,称为广义大地坐标微分公式或广义变换椭球微分公式。

已知空间一点的大地空间直角坐标与大地坐标间的关系式是

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+H)\cos B\cos L \\ (N+H)\cos B\sin L \\ [N(1-e^2)+H]\sin B \end{bmatrix}$$

可见，X、Y、Z 是 L、B、H、a、α(或 e^2) 的函数。当这些变量各有 $\mathrm{d}L$、$\mathrm{d}B$、$\mathrm{d}H$、$\mathrm{d}a$、$\mathrm{d}\alpha$ 的微分变化时，取 $\mathrm{d}X$、$\mathrm{d}Y$、$\mathrm{d}Z$ 的全微分为

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}X\\\mathrm{d}Y\\\mathrm{d}Z\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}\begin{bmatrix}\mathrm{d}L\\\mathrm{d}B\\\mathrm{d}H\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathrm{d}a\\\mathrm{d}\alpha\end{bmatrix}\tag{7-15}$$

式中

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial L}&\dfrac{\partial X}{\partial B}&\dfrac{\partial X}{\partial H}\\\dfrac{\partial Y}{\partial L}&\dfrac{\partial Y}{\partial B}&\dfrac{\partial Y}{\partial H}\\\dfrac{\partial Z}{\partial L}&\dfrac{\partial Z}{\partial B}&\dfrac{\partial Z}{\partial H}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(N+H)\cos B\sin L&-(M+H)\sin B\cos L&\cos B\cos L\\(N+H)\cos B\cos L&-(M+H)\sin B\sin L&\cos B\sin L\\0&(M+H)\cos B&\sin B\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial a}&\dfrac{\partial X}{\partial \alpha}\\\dfrac{\partial Y}{\partial a}&\dfrac{\partial Y}{\partial \alpha}\\\dfrac{\partial Z}{\partial a}&\dfrac{\partial Z}{\partial \alpha}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{N}{a}\cos B\cos L&\dfrac{M}{1-\alpha}\cos B\cos L\sin^2 B\\\dfrac{N}{a}\cos B\sin L&\dfrac{M}{1-\alpha}\cos B\sin L\sin^2 B\\\dfrac{N}{a}(1-e^2)\sin B&-\dfrac{M}{1-\alpha}\sin B(1+\cos^2 B-e^2\sin^2 B)\end{bmatrix}$$

由式(7-15)，得

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}L\\\mathrm{d}B\\\mathrm{d}H\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{d}X\\\mathrm{d}Y\\\mathrm{d}Z\end{bmatrix}-\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathrm{d}a\\\mathrm{d}\alpha\end{bmatrix}\tag{7-16}$$

式中

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}X\\\mathrm{d}Y\\\mathrm{d}Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_{新}-\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_{旧}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}L\\\mathrm{d}B\\\mathrm{d}H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L\\B\\H\end{bmatrix}_{新}-\begin{bmatrix}L\\B\\H\end{bmatrix}_{旧}$$

为了推导逆矩阵 $\boldsymbol{J}^{-1}$，将 $\boldsymbol{J}$ 分解为两个矩阵的乘积

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{SH}\tag{7-17}$$

式中

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}-\sin L&-\sin B\cos L&\cos B\cos L\\\cos L&-\sin B\sin L&\cos B\sin L\\0&\cos B&\sin B\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}(N+H)\cos B&0&0\\0&M+H&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

按矩阵求逆法则得

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\tag{7-18}$$

$\boldsymbol{H}$ 为对角矩阵，其逆阵为

$$\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(N+H)\cos B} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{M+H} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tag{7-19}$$

$\boldsymbol{S}$ 为正交矩阵，有

$$\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\sin L & \cos L & 0\\ -\sin B\cos L & -\sin B\sin L & \cos B\\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B\end{bmatrix}\tag{7-20}$$

将式(7-19)和式(7-20)代入式(7-18)得

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\sin L}{(N+H)\cos B} & \dfrac{\cos L}{(N+H)\cos B} & 0\\ -\dfrac{\sin B\cos L}{M+H} & -\dfrac{\sin B\sin L}{M+H} & \dfrac{\cos B}{M+H}\\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B\end{bmatrix}\tag{7-21}$$

将布尔莎模型式(7-13)代入式(7-16)，得

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}L\\ \mathrm{d}B\\ \mathrm{d}H\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\Delta X_0\\ \Delta Y_0\\ \Delta Z_0\end{bmatrix}+\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{QB}+\boldsymbol{J}^{-1}m\boldsymbol{B}-\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathrm{d}a\\ \mathrm{d}\alpha\end{bmatrix}\tag{7-22}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y\\ -\varepsilon_Z & 0 & \varepsilon_X\\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}_{\text{旧}}=\begin{bmatrix}(N+H)\cos B\cos L\\ (N+H)\cos B\sin L\\ [N(1-e^2)+H]\sin B\end{bmatrix}$$

式中，L、B、H 为旧大地坐标，下角“旧”字均略写。将上式整理后，得

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}L\\ \mathrm{d}B\\ \mathrm{d}H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\sin L}{(N+H)\cos B}\rho'' & \dfrac{\cos L}{(N+H)\cos B}\rho'' & 0\\ -\dfrac{\sin B\cos L}{M+H}\rho'' & -\dfrac{\sin B\sin L}{M+H}\rho'' & \dfrac{\cos B}{M+H}\rho''\\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta X_0\\ \Delta Y_0\\ \Delta Z_0\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}\tan B\cos L & \tan B\sin L & -1\\ -\sin L & \cos L & 0\\ -\dfrac{Ne^2\sin B\cos B\sin L}{\rho''} & \dfrac{Ne^2\sin B\cos B\cos L}{\rho''} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_X''\\ \varepsilon_Y''\\ \varepsilon_Z''\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{N}{M}e^2\sin B\cos B\rho''\\ N(1-e^2\sin^2 B)\end{bmatrix}m+$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{N}{(M+H)a}e^2\sin B\cos B\rho'' & \dfrac{M(2-e^2\sin^2 B)}{(M+H)(1-\alpha)}\sin B\cos B\rho'' \\ -\dfrac{N}{a}(1-e^2\sin^2 B) & \dfrac{M}{1-\alpha}(1-e^2\sin^2 B)\sin^2 B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{d}a \\ \mathrm{d}\alpha \end{bmatrix} \quad (7\text{-}23)$$

式中，$\mathrm{d}L$、$\mathrm{d}B$ 以(″) 为单位。式(7-23) 是顾及 7 个参数和椭球大小变化的广义大地坐标微分公式。由公式可见，$\mathrm{d}a$、$\mathrm{d}\alpha$、ΔZ_0、m 对大地经度没有影响，即该部分的 $\mathrm{d}L=0$，ε_Z 对大地纬度和大地高没有影响。略去旋转参数和尺度变化参数的影响，上式即为一般的大地坐标微分公式。

三、格网坐标转换

类似高程异常、垂线偏差格网模型，可建立坐标转换格网模型。

利用公共点上两个大地坐标系的坐标值，采用一定的数学模型(如：最小曲率法、最小二乘配置、多元回归、布尔莎模型等)计算具有一定间隔的格网节点的经纬度坐标差，建立坐标转换格网模型。有了坐标转换格网模型后，只需根据待转换点所在位置周围 4 个格网节点的坐标转换量，利用双线性内插公式计算该点的坐标转换量(见图 7-4)。该方法一般用于地形图图廓线和方里网的高精度变换。

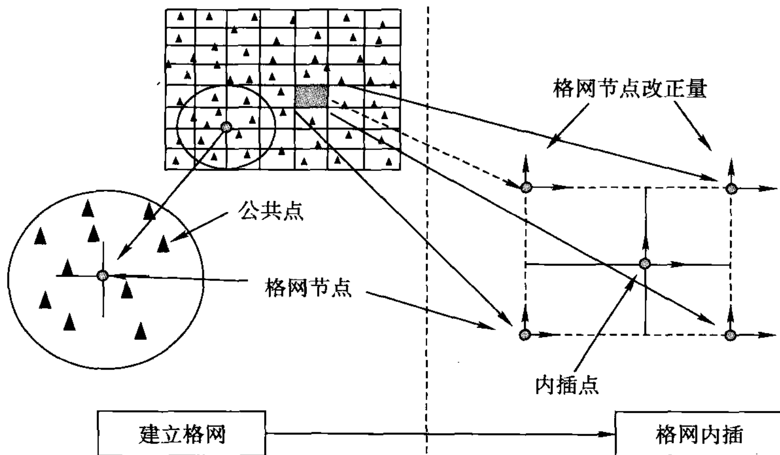


图 7-4　格网坐标转换原理

§7-3　椭球定位的经典方法

一、大地起算数据与椭球定位

椭球定位，即建立大地坐标系，就是按一定条件将具有确定元素的地球椭球同大地体的相关位置确定下来，从而获得大地测量计算的基准面和大地坐标起算数据。

“椭球定位”是椭球定位和定向的总称，即①确定椭球中心的位置，简称定位；②确定椭球中心为原点的空间直角坐标系坐标轴的方向，确定椭球短轴的指向和起始大地子午面，简称定向。

国家水平大地控制网中推算各点大地坐标的起算点，称为大地原点。大地原点的大地坐

标值 L_0、B_0、H_0 以及它对某一方向的方位角 A_0，总称为经典大地测量的基准。

椭球定位和确定大地起算数据是密切联系的，即定位就是确定大地起算数据；而确定了大地起算数据也就完成了定位。如图 7-5 所示，大地原点 P 的 L_0、B_0 确定了椭球过该点的法线，但此时椭球还可以绕这一法线旋转和平移，H_0 和 A_0 确定后则使椭球完全固定了。

从数学原理上讲，无论如何定位，即任意一组 L_0、B_0、H_0、A_0，都能使椭球与大地体的关系确定下来，但是，任意方式的定位绝不是合适的定位。参考椭球是大地体的数学化形状，要使之尽量接近大地体。这样在大地测量实践中，才能使观测元素归算到椭球上具有实际意义，同时也便于垂线偏差和起始大地方位角等的解算。于是，要求椭球定位满足以下条件：

(1)椭球的短轴与地球的自转轴平行；

(2)起始大地子午面与起始天文子午面平行；

(3)椭球面与某一区域的大地水准面最为密合。

用解析式表示这 3 个条件：

(1) $\varepsilon_X = 0, \varepsilon_Y = 0$；

(2) $\varepsilon_Z = 0$(在 $\varepsilon_X = 0$ 的基础上)；

(3) $\sum N^2 =$ 最小。

式中，ε_X、ε_Y、ε_Z 为欧勒角，N 为大地水准面差距。

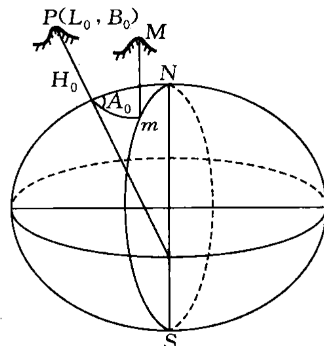


图 7-5　大地起算数据和椭球定位

在以上 3 个条件中，前两个条件(简称“双平行”)得到满足，则椭球与真实地球的情况接近，能构成最为简单的垂线偏差公式和拉普拉斯方位角公式

即

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi - B \\ \eta &= (\lambda - L)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7-24}$$

$$A = \alpha - (\lambda - L)\sin\varphi \tag{7-25}$$

第三个条件能保证椭球面与大地水准面很接近，从而使观测量归算所加的改正数很小，与实际量更好地符合。

椭球定位中，可以通过以下方法使确定的 L_0、B_0、H_0、A_0 满足这 3 个条件。

式(7-24)和式(7-25)是在双平行的条件下得到的，由该两式确定的 L_0、B_0、A_0 为

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec\varphi_0 \\ B_0 &= \varphi_0 - \xi_0 \\ A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \tan\varphi_0 \\ H_0 &= H_{正0} + N_0 \end{aligned}\right\} \tag{7-26}$$

如果所确定的大地起算数据满足式(7-26)，则一定满足双平行条件，即定位条件(1)、(2)。式(7-24)和式(7-25)是式(7-10)、式(7-11)取 $\varepsilon_X = \varepsilon_Y = \varepsilon_Z = 0$ 时的形式。这里，ε_X、ε_Y、ε_Z 确定了椭球的定向，称为参考椭球的定向参数。

式(7-26)中 λ_0、φ_0、α_0 和 $H_{正0}$ 通过天文测量和水准测量方法得到，ξ_0、η_0、N_0 是大地原点上的垂线偏差和大地水准面差距。

怎样使所确定的 L_0、B_0、H_0、A_0 满足定位条件(3)，这就是 ξ_0、η_0、N_0 的选择问题。ξ_0、η_0、N_0 的作用类似于布尔莎模型中的 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0，它们确定了椭球的定位，称为参考椭球的定位

参数。

根据所获得 ξ_0、η_0、N_0 的途径不同，分为一点定位和多点定位两种定位方法。

一点定位只是简单的取

$$\xi_0 = 0,\quad \eta_0 = 0,\quad N_0 = 0$$

上式表明，在大地原点处，椭球的法线方向和铅垂线方向重合，椭球面和大地水准面相切。由式(7-26)得

$$L_0 = \lambda_0,\quad B_0 = \varphi_0,\quad A_0 = \alpha_0,\quad H_0 = H_{正0}$$

可见，一点定位实质上是将大地原点上所测的天文经纬度和天文方位角视为大地经纬度和大地方位角，大地原点上的正高(正常高)视为大地高。一点定位的结果，在较大区域内往往难以使椭球面和大地水准面有较好的密合。所以，在基本完成全国天文大地测量后，往往利用所测成果，按 $\sum N^2 =$ 最小这一条件予以重新定位，这就是多点定位。

多点定位是在多个天文大地点上列出弧度测量方程，通过平差计算得到 ξ_0、η_0、N_0，从而完成椭球的定位。

二、弧度测量方程

弧度测量可以分成古代弧度测量、近代弧度测量和现代弧度测量。

在古代，当人们认识到地球是一个球体时，在技术上通过两点间的弧长和纬差测量，便可以推算地球的形状和大小，这就是弧度测量的早期含义。

第一个估算地球大小的是埃及学者埃拉托色尼(公元前 276～194 年)，他估算地球半径为 6 844 km。鉴于没有实地量测，所以这不能算是实地弧度测量。世界上第一次开展实地弧度测量的国家是我国。公元 724 年(唐开元十二年)，在天文学家一行(本名张遂)的主持下，太史监南宫说在河南平原地区实测了滑县、浚仪(今开封)、扶沟和上蔡间的距离，并观测该四地的北极高度和夏至正午日影长度，得出子午线一度弧长为 351 里 80 步(唐代长度 1 里等于 300 步)。由于 1 唐里等于 1 500 唐尺，1 唐尺等于 24.75 cm，可以算得一度弧长为 130.38 km。又古代天文学家将圆周分为 365.25 度，折合 360 度制，得一度弧长为 132.28 km。这个数值与现在已知的每度弧长约为 111 km 相比，虽大了 21 km，但就当时的技术水平而言，得出这样的结果已经是很不简单了。

自牛顿提出地球形状是椭球体的说法，加之斯奈尔创立了三角测量法后，从 18 世纪初开创了弧度测量的新纪元，弧度测量的含义扩展为确定地球椭球的两个元素，即长半径 a 和扁率 α。从 19 世纪初起，各国测量学家从事了大量弧度测量工作，前后推算出许多地球椭球的结果。由第五章的子午线弧长公式可知，子午线弧长是 a 和 e^2(或 α) 的函数，通过地球上许多子午线弧段的测量结果，就可用最小二乘法解出 a 和 α(或 e^2)。目前所用的弧度测量方程式是由式(7-23) 导出的。在实践中，推求新的椭球元素，是在原有旧的椭球的基础上，利用天文、大地、重力和卫星测量等资料完成的。因此，推算新椭球元素实际上是一个逐次趋近的过程。设旧椭球的元素为 $a_{旧}$ 和 $\alpha_{旧}$，新椭球元素为 $a_{新} = a_{旧} + da$，$\alpha_{新} = \alpha_{旧} + d\alpha$。现在的问题就是要求出 da 和 $d\alpha$。

由垂线偏差公式可以写出

$$\begin{bmatrix}\eta_{新}\\ \xi_{新}\\ N_{新}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda-L_{新})\cos B_{新}\\ \varphi-B_{新}\\ N_{新}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda-L_{旧})\cos B_{旧}\\ \varphi-B_{旧}\\ N_{旧}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\mathrm{d}L\cos B_{旧}\\ -\mathrm{d}B\\ \mathrm{d}N\end{bmatrix}\tag{7-27}$$

式中，$\mathrm{d}N=\mathrm{d}H$。将式(7-23)代入上式，得

$$\begin{bmatrix}\eta\\ \xi\\ N\end{bmatrix}_{新}=\begin{bmatrix}\frac{\sin L}{(N+H)} & -\frac{\cos L}{(N+H)} & 0\\ \frac{\sin B\cos L}{M+H} & \frac{\sin B\sin L}{M+H} & -\frac{\cos B}{M+H}\\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B\end{bmatrix}_{旧}\begin{bmatrix}\Delta X_0\\ \Delta Y_0\\ \Delta Z_0\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}-\sin B\cos L & -\sin B\sin L & \cos B\\ \sin L & -\cos L & 0\\ -Ne^2\sin B\cos B\sin L & Ne^2\sin B\cos B\cos L & 0\end{bmatrix}_{旧}\begin{bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \varepsilon_Z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{N}{M}e^2\sin B\cos B\\ N(1-e^2\sin^2 B)\end{bmatrix}m+$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{N}{(M+H)a}e^2\sin B\cos B & -\frac{M(2-e^2\sin^2 B)}{(M+H)(1-\alpha)}\sin B\cos B\\ -\frac{N}{a}(1-e^2\sin^2 B) & \frac{M}{1-\alpha}(1-e^2\sin^2 B)\sin^2 B\end{bmatrix}_{旧}\begin{bmatrix}\mathrm{d}a\\ \mathrm{d}\alpha\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}(\lambda-L_{旧})\cos B_{旧}\\ \varphi-B_{旧}\\ N_{旧}\end{bmatrix}\tag{7-28}$$

上式称为广义弧度测量方程式。其未知数是 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0，ε_X、ε_Y、ε_Z、m、$\mathrm{d}a$ 和 $\mathrm{d}\alpha$。在实用上，根据上述定位条件(1)、(2)通常弃去 ε_X、ε_Y、ε_Z 和 m 值。利用上式就可以推求新的椭球元素和定位值。

在天文大地网中每一个天文大地点上都可以列出如式(7-28)的弧度测量方程式。依据

$$\sum(\xi_{新}^2+\eta_{新}^2)=最小\tag{7-29}$$

或

$$\sum N_{新}^2=最小\tag{7-30}$$

进行解算，就可以求出最适合于某一所计算的地区的椭球元素 $a_{新}=a_{旧}+\mathrm{d}a$，$\alpha_{新}=\alpha_{旧}+\mathrm{d}\alpha$ 以及新椭球定位元素 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0。将解得的值代回式(7-28)中，可以求出任一天文大地点的 $\xi_{新}$、$\eta_{新}$ 和 $N_{新}$ 值，当然也包括大地原点上的 ξ_0、η_0、N_0。

由于 ξ、η 和 N 的相关性，从理论性讲式(7-29)与式(7-30)是等价的。但是，由式(7-28)可以看到，如果改变椭球元素，η 值并不改变。这说明垂线偏差随椭球元素的变化并不显著。因此，按式(7-29)的条件解算弧度测量方程式，所得结果精度要低一些。另外，考虑到 N 的变化较 ξ、η 的变化平缓，因而可以较少受到局部异常的影响。因此，实践中一般采用 $\sum N_{新}^2=$ 最小这一条件。当采用正常高系统时，则相应条件为 $\sum \zeta_{新}^2=$ 最小。

应该指出，对于一个国家来说，即使幅员广大，但相对于全球而言，所占的比例总是有限，因此，用一国测量资料解算弧度测量方程得出的椭球元素往往和用全球资料得出的结果相差甚大。例如，仅仅根据我国天文大地测量资料算得的地球椭球长半径约为 6 378 670 m，扁率

约为 1∶292.0。因此,在我国 1980 西安大地坐标系的建立中,取消了地球椭球大小这两个参数的求解,a 和 α 采用 IUGG 1975 年推荐的数值,这样解算弧度测量方程就只是解决椭球定位问题了。

因此,多点定位就是在原来天文大地点上列出如下的弧度测量方程

$$
\begin{aligned}
N_{新} = {} & \cos B_{旧}\cos L_{旧}\,\Delta X_0 + \cos B_{旧}\sin L_{旧}\,\Delta Y_0 + \sin B_{旧}\,\Delta Z_0 + \\
& \frac{N_{旧}}{a_{旧}}(1 - e_{旧}^2\sin^2 B_{旧})\Delta a + \frac{M_{旧}}{1-\alpha_{旧}}(1 - e_{旧}^2\sin^2 B_{旧})\sin^2 B_{旧}\,\Delta\alpha + N_{旧}
\end{aligned}
\tag{7-31}
$$

按 $\sum N_{新}^2$ = 最小,解得新、旧椭球中心的位置差 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0,然后将其代入下式

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\eta\\ \xi\\ N\end{bmatrix}_{新} = {} & \begin{bmatrix}\dfrac{\sin L}{(N+H)} & -\dfrac{\cos L}{(N+H)} & 0\\ \dfrac{\sin B\cos L}{(M+H)} & \dfrac{\sin B\sin L}{(M+H)} & -\dfrac{\cos B}{(M+H)}\\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B\end{bmatrix}_{旧}\begin{bmatrix}\Delta X_0\\ \Delta Y_0\\ \Delta Z_0\end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix}0 & 0\\ -\dfrac{N}{(M+H)a}e^2\sin B\cos B & -\dfrac{M(2-e^2\sin^2 B)}{(M+H)(1-\alpha)}e^2\sin B\cos B\\ -\dfrac{N}{a}(1-e^2\sin^2 B) & \dfrac{M}{1-\alpha}(1-e^2\sin^2 B)\sin^2 B\end{bmatrix}_{旧}\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta\alpha\end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix}(\lambda - L_{旧})\cos B_{旧}\\ \varphi - B_{旧}\\ N_{旧}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

从而获得各个天文大地点上的 ξ、η、N,当然也得到了大地原点上的 ξ_0、η_0、N_0,最后得到新的大地起算数据。

多点定位结果表明,在大地原点处,椭球的法线方向和铅垂线方向不相重合,椭球面和大地水准面不再相切,但在区域内,椭球面与大地水准面有最佳地密合。

在区域内(非全球)按 $\sum N^2$ = 最小进行椭球定位,椭球的中心不会和地球质心重合,因此是局部定位或非地心定位,所建立的坐标系称为参心坐标系或局部坐标系。

与以上近代弧度测量方法不同,现代弧度测量的概念大大拓展,它是综合利用全球重力测量和空间大地测量资料,从几何和物理两个方面研究地球,因此不但包括地球椭球的几何形状和大小,而且包含地球重力场的研究,除提供描述地球的 4 个基本参数 a(椭球长半径)、GM(引力常数与地球质量的乘积)、J_2(地球重力场二阶带谐系数)、ω(地球自转角速度)以及由此导出的一系列几何和物理常数外,还有地球重力场模型等。

§7-4 协议地球参考系

一、地心坐标系及其应用需求

以地球质心为原点的一类坐标系称为地心坐标系。与此类似,可将以经典大地测量技术建立的参考椭球的几何中心为原点的坐标系称为参心坐标系。和参心坐标系一样,地心坐标

系可以分成地心大地坐标系和地心大地空间直角坐标系。在地球动力学等应用中，地心坐标系一般称为地球参考系。由于极移的影响，使地球参考系坐标轴的指向发生变化，这将会对实际工作造成许多困难。因此，国际天文学联合会和国际大地测量学协会早在1967年便建议，采用国际上5个纬度服务站于1900～1905年的平均纬度所确定的平均地极位置为基准点。平极的这个位置是相应于上述期间地球自转轴的平均位置，通常称为国际协议原点(CIO)。与之相应的地球赤道面，称为平赤道面或协议赤道面。在实际工作中，至今仍普遍采用CIO作为协议地极(CTP)。以协议地极为基准点的地球参考系，称为协议地球参考系，而与瞬时极相应的地球参考系，称为瞬时地球参考系。

就区域范围的测制地形图和工程应用而言，地心坐标系并不是直接需要的，但是对于跨大区域的测绘项目和集成应用，以及与物理因素有关的空间技术、地球动力学和地球重力场研究等，地心坐标系显得十分重要。

(一)地心坐标系在地球动力学、物理大地测量学和空间技术中的应用需求

20世纪60年代以后，地球动力学作为一门交叉学科逐渐引起了大地测量学者的关注。人们发现，应用空间大地测量技术已能监测几乎所有地球动力现象，如地壳运动、物质迁移、潮汐变化、地球自转等，因此，大地测量已是现今研究地球动力现象最基本的方法之一。一般地说，要系统地研究地球动力学问题，首先需建立稳定性较好的参考系，否则各种观测数据就没有参考基准，无法构造统一的理论或解释模型。为此，定义并实现适合于地球动力学研究目的的参考系极为重要。

与静态大地测量中建立参心坐标系不同，动态大地测量是将地球视为一个非刚性的、可形变的质体，因此，就有将参考系的原点选在地球内的什么位置才是稳定的这一重要问题。如果把地球看作一质点系，其内部的合力为零，则根据质点系动力学理论，地球在其他天体的合外力作用下沿着某条确定的轨道运行，而地球质点的运动规律与假想的整个地球质量都集中在质心处的质点的运动规律完全相同。因此，无论地球内部的质量怎样迁移，地球形状发生怎样的变化，地球质心都沿着一条确定的轨道运行。这一推理的意义在于，尽管地面点的位置是随时变化的，但地球质心的位置从太空看是“固定”的。因此，就研究地球动力学问题来说，将参考系的原点选在地心最为理想。

在物理大地测量中，需要选择一个与全球大地水准面密合的正常椭球体，其几何中心与地球质心一致。同时，重力场的表示需借助于某一参考系，由§4-1知，这一参考系是以地心为原点的。

在空间技术中，地心坐标系的意义十分重要。人造地球卫星和弹道导弹在围绕地球飞行时，其轨道平面随时通过地球质心，因此轨道计算是在地心系中进行的，自然，对它们的跟踪观测亦应在以地球质心为原点的坐标系中进行，否则就无法精确地推算它们的轨道并进行跟踪。导弹在实际发射时，弹上各个系统的装定诸元都是在解算弹道的基础上求取的，因而所及导弹飞行中各点位的坐标，包括发射点和目标点坐标，必须属地心坐标系。

(二)地心坐标系在测绘工程中的应用需求

在测绘工程中，用户对测绘产品的应用需求也发生了深刻的变化。人们认识到，采用地心基准能使综合集成的地理信息应用简单化(不需转换接口)，并能确保地理信息在种类、空间、时间等方面的“无缝”衔接，以下分述之。

1. 导航、施工放样等集成应用的要求

当前和未来大多数地图(含空间数据库)的应用项目是与卫星导航应用相联系的,如车载导航系统、动态指挥和管理等。以地心基准作为地图的数学基础,能使 GPS 等技术的空间导航结果直接在地图平台上定位,这一应用需求与传统的应用要求是不同的。传统应用中,人们使用地图只是关心相对位置,而非绝对位置,例如依据独立地物、居民等判断位置和方位,自然,用户并无地心基准的需求。除不同种类地理信息的集成应用外,不同区域、不同时间的地理信息参考于同一基准后,同样能直接相互迭加,从而避免了附加的转换接口。

同样,在工程建设中,由于施工放样等实测过程应用了 GPS,故如工程设计图采用地心坐标系为基准,则可避免坐标系转换的麻烦。

2. 地理信息的应用在空间域上的整体性要求

地球是一个整体,社会和技术的发展,将使地理信息的应用打破以国界为应用范围的传统模式,而扩展至整个地球空间。以地心基准为参考是这种转变得以实现的基础。

地心基准是确保海图与地形图间"无缝"拼接的前提条件。国际海道测量局已确定以 WGS 84(1994 年起该系已与 ITRF 一致)作为海图的基准,将各国海图统一为地心基准在航海应用中的现实意义是不言而喻的,如能使地形图的基准与海图一致,则有利于近海岸的舰船和航空导航。否则,导航系统与地图平台、海图与地形图之间均存在着额外的外部转换。

国际组织开展的跨国界洲际 GIS、全球测图等计划的实施需要以地心系为基准。

高动态大地测量技术可确定遥感平台的瞬时地心坐标,这表明遥感信息将直接参考于地心基准。

3. 地理信息的应用在时间域上的整体性要求

时态数据库要求参考基准能长期维持。参心基准是静态基准,而地心基准则可长期维持。在 GIS 中,历史信息、当前信息和未来信息应参考于同一基准,这就要求基准系统在时间域上是连续的。动态地心参考系能模拟地壳构造因素引起的位置漂移。虽然在制图应用等场合二三十年内可不顾及这项影响,但一旦要考虑此影响,地心基准可确保系统连续。

另外,数字化时代控制点的高精度信息均在空间数据库中保存,而手工模拟地图上所表示的控制点精度则受制于绘图精度。即数字地图并不损失高精度基准的信息量,相反,高精度基准的采用还会扩展空间数据库在地学研究中的应用价值。

GPS 差分技术已使控制点随测随用成为现实,所对应的基准为地心系且要求在时序上连续,即不同时期所测之点应属于同一系统。

4. 大地测量技术发展的要求

GPS 以及类似的卫星定位系统已经或将要渗透到人类社会的各个方面,GPS 采用地心坐标系,这要求大地测量及其产品必须使用与之适应的坐标系。

精密大地测量的动态性要求必须以具有物理意义的高精度地心坐标系为基准。

二、协议地球参考系和协议地球参考框架的定义

(一)极移和国际协议原点

地球极点是地球自转轴与地球表面的交点。由于地球自转轴在地球本体内的运动,地球极点在地球表面上的位置随时间而变化,这种现象叫做地极移动,简称极移。随时间而变化的地球自转轴为瞬时轴,相应的极点叫瞬时极。

由于瞬时极在地球表面移动的范围较小，故可取一个通过地极轨迹线中心与地球表面相切的平面替代这一范围的地球表面。通常在此平面上建立平面直角坐标系来确定极点的瞬时位置，此坐标系称为地极坐标系。如图 7-6 所示，取切点为原点，令为 P_0，此点为某时期瞬时极的平均位置（称为平均极点），并作为地极原点，习惯上取过 P_0 点的格林尼治子午线方向为 x 轴的正方向，取格林尼治以西 90° 的子午线方向为 y 轴的正向，则瞬时极 P 的坐标可以用直角坐标（x_P，y_P）表示。

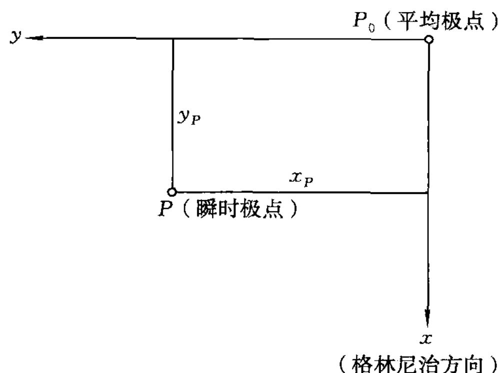


图 7-6　地极坐标系

以极移矩阵 $A = R_Y(-x_P)R_X(-y_P)$（参见图 7-2，x_P、y_P 即为图中的欧勒角）建立协议地球参考系（以下标“协议”表示）与瞬时地球参考系（以下标“瞬时”表示）的关系为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{协议} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{瞬时} \tag{7-32}$$

测定极移的机构有国际纬度局（ILS）、国际极移服务（IPMS）和国际时间局（BIH）。20 世纪 70 年代以来，鉴于先后产生了激光测卫（SLR）、激光测月（LLR）、甚长基线干涉测量（VLBI）和 GPS 等新技术，使测定极移的传统的光学天体测量方法被先进的空间大地测量方法所替代。于是国际机构决定从 1988 年起，采用由新技术组建的国际地球自转服务（IERS）替代 IPMS 和 BIH 等机构。

几十年来，对极移的研究不断深入，产生了多种地极系统。1967 年在意大利斯特米萨国际天文学联合会（IAU）和国际大地测量与地球物理联合会（IUGG）共同召开的 32 次讨论会上建议平极的位置用 5 个台站的“1900～1905 年新系统”的平均纬度来确定，平极的这个位置相对于 1900～1905 年平均历元（1903.0），叫做国际协议原点，简称 CIO。ILS、IPMS 和 BIH 等机构都先后用不同的光学仪器和数学处理方法，分别保持这个地极原点，故有不同的 CIO 系统。属 BIH 系统的 CIO 有 $BIH_{1968.0}$、$BIH_{1979.0}$ 和 $BIH_{1984.0}$ 等。

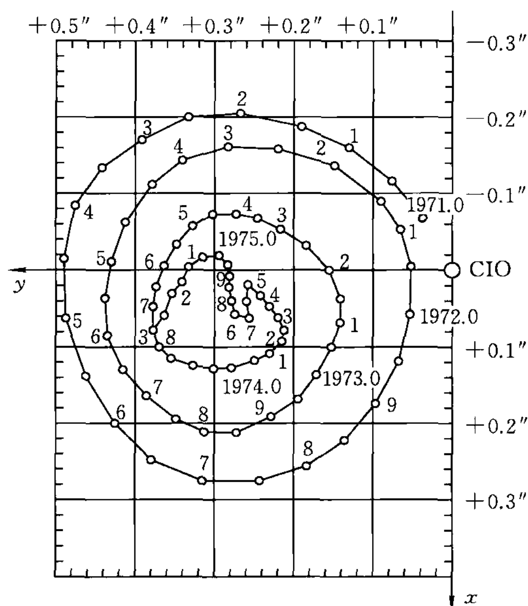


图 7-7　1971～1975 年瞬时极相对于 CIO 的运动轨迹

当前，CIO 系统由 IERS 维持。IERS 根据全球观测台站的资料，解算并定期出版公报向用户提供瞬时极资料。图 7-7 描述了 1971～1975 年间瞬时极相对于 CIO 的运动轨迹。

（二）协议地球参考系和协议地球参考框架

1. 参考系与坐标系

为了描述一个事件的发生，比如确定一个粒子的位置、描述一个粒子或质体（地球或卫星）的运动规律，必须选定一个参考系（物理学中称为

参照系)。没有参考系,谈论运动规律是没有意义的。

参考系与坐标系的区别在于,坐标系着重考虑数学表示形式,更注重数学意义;而参考系着重考虑参照物,不考虑参考系本身所采用的数学表示形式,更注重物理意义。比如,以地球质量中心为原点建立一个与地球固结在一起的参考系(称为地球参考系)。在这个参考系中,为了描述一个粒子或质点体系的运动规律,可以采用笛卡尔直角坐标系,也可以采用球面坐标系或其他坐标系。这些坐标系的原点都在地心,且它们之间相对静止,因而所描述的粒子的运动规律是完全相同的,不会因选用不同的坐标形式而变。因此,一种参考系包含了很多本质上相同的坐标系,可将它们称为等价同类坐标系,从中任意选取一个坐标系都不会影响对客观规律的描述。

在大地测量中,如果提到选定了一个坐标系,那同时也隐含着选定了参考系。如果说选定了参考系,那也就意味着选定了该参考系下的任意一种坐标系。在概念上区分参考系与坐标系是有益的。当所建的系统用于测绘工程中描述地形的几何表示等应用时,将该系统称之为坐标系是合适的,但当用于形变监测、航天试验等具有物理意义的场合,则称之为参考系更为贴切。在实用上,常常将参考系和坐标系两者混用。

2. 理想的地球参考系

地球参考系是以某种确定的方式联系到地球的参考系。如果地球是理想的刚体,则固定于地球的任何三轴坐标系都是合适的,地球参考系的选择仅取决于应用的方便。但实际上地球是个形变体,地壳各部分存在着相对运动,因此以一种理想的方式把坐标系固定于地球就成为一个十分重要的问题。

地球的整体运动(如极移)和局部运动(如地壳形变)是叠加在一起被观测到的,要分离它们可借助于一固定于地球的参考系,这样的参考系应按如下的理论概念定义:相对于它,地壳只存在形变,不存在整体的旋转和平移;而它相对于惯性参考系只包含地球的公转和自转等整体运动。这一理论概念可采用如下的 Tisserand 条件来描述:

$$\int_c \boldsymbol{v} \mathrm{d}m = 0$$

$$\int_c \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v} \mathrm{d}m = 0$$

式中,$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{v}$ 是点质量 $\mathrm{d}m$ 相对于所定义的参考系的位置和速度;积分区间 c 是指整个地球。第一个条件表示相对于所定义的参考系,地球的线动量为 0,表明地球不存在整体的平移;第二个条件表示相对于所定义的参考系,地球的角动量为 0,表明地球不存在整体的旋转。如此定义参考系,则分离了地球的整体运动和局部运动,称为理想的地球参考系。如果这样的参考系得以实现,就有理由认为这个参考系中描述的测站的运动属于该测站自身的运动。

3. 协议地球参考系

要实际建立地球参考系,需选择一些物理基准(即原点、尺度、定向等),这些物理基准的选择具有一定的不完全和随意性,为了统一,需要协议约定。于是,用术语“协议”来描述这种特定的选择,这就是协议地球参考系(CTRS)的概念。

协议地球参考系的定义是

(1)原点:在地心,地心定义为包括海洋和大气的整个地球的质量中心;

(2)尺度:单位为 m(国际单位制),即在引力相对论意义上的局部地球框架内定义的 m;

(3)定向:由 BIH 1984.0 给定;

(4)定向的时间演化:相对于地壳不产生残余的全球性旋转。

4. 协议地球参考框架

参考框架是参考系的具体实现。一旦协议地球参考系选定了,便要使之能为各类用户可用。为此,系统要通过许多实际的地面点具体化。因为,一组全球分布点的三维直角坐标,隐含着一个原点的位置、一组正交笛卡尔坐标轴的指向和一个尺度参数。这样一组协议选定的使系统具体化的地面点及其坐标就定义了协议地球参考框架(CTRF)。因此,我们熟知的"大地控制网"就属于参考框架的概念。

在形变地球上建立地球参考框架可通过转换参数改变测站的坐标而得到。随时而变的测站坐标由国际服务机构重复确定,由于任何全球性的系统误差都可以归纳为尺度、平移或旋转误差并归入 7 个转换参数中,因而在 Tisserand 条件的约束下,由国际服务机构计算和发布的转换参数定义了所实现系统的框架。

三、协议地球参考框架的建立和维持

地球参考系从定义到实现需要完成以下几步工作:

(1)如上所述,给出地球参考系的理论定义和协议约定;

(2)建立地面观测台站,并进行空间大地测量;

(3)根据对协议地球参考系的约定,采用国际推荐的一组模型和常数,对观测数据进行数据处理,解算出各观测台站在某一历元的站坐标,即建立协议地球参考框架。

(4)对于影响地面台站稳定的各种形变因素进行分析处理,建立相应的时变模型,以维持协议地球参考框架的稳定。

关于地球质心位置的确定,我们先假想地球是一刚体,通过 SLR 等卫星动力学方法确定了地面 $n(n \geqslant 3)$ 个点至地球质心的距离,然后再采用 GPS、VLBI 等测量方法把这几个点之间的距离确定下来,于是通过几何约束条件即可确定地心的位置。然而,由于地球并非刚体,而是结构复杂的粘弹体,因而这几个点是在不断变化的。这种变化不仅有规则变化,如固体潮的规则项,还有不规则变化,如各种难以预测的形变等,因而地球质心的精确位置还是没有确定,这种不确定性可通过长期多次地重复观测而得到改善。不难理解,采用最小二乘法解算出的地心相对于地面的几个台站的位置精度不仅取决于测量精度,还与台站的个数和图形结构有关。

关于地球参考系坐标轴指向的确定,我们知道这与地球自转轴有关。首先我们说明,地球瞬时自转轴必定通过地球质心,因为如果不通过地心,则地球质心必定要绕瞬时自转轴转动,这与质点系动力学定律不符。由于极移运动,瞬时自转轴运动轨道构成了一个近似的圆锥面,以地球质心为其锥顶。取平均自转轴,即圆锥面的对称轴,为 Z 轴,将 X 轴限定在格林尼治天文台的子午面内,再选定 Y 轴,使 $O—XYZ$ 构成右手直角坐标系。这样我们就建立了地球质心参考系。实用中参考系的三轴指向由 BIH/IERS 提供的地球自转参数(ERP)确定。

利用 SLR 技术,可以独立地完成地球参考框架的建立和维持。对于不同的 SLR 网,由于在解算中采用的各种模型不一、台站个数不一和资料多少不一等因素,各网建立的参考框架间存在着一定的差异。

利用 VLBI 技术可以高精度地确定参考坐标系的定向和尺度,但其原点不定,因此往往用 SLR 技术确定某一台站的坐标作为起算点,如一般 VLBI 网均采用美国 Westford 站为其起算

点。同样,各 VLBI 网建立的参考系间也存在着一定的差异。

GPS 等技术也可以按各自的技术特点建立地球参考框架。

对上述全球各个 SLR 网、VLBI 网、GPS 网和其他空间大地网联合平差,就可建立国际地球参考框架 ITRF。

联合平差的方程形式是

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{CTRF}} + \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{7-33}$$

式中,$[\delta X \quad \delta Y \quad \delta Z]^{\mathrm{T}}$ 是测站的形变位移;$[X \quad Y \quad Z]_{\text{obs}}^{\mathrm{T}}$ 是在观测技术“0”(如 SLR、VLBI 或 GPS 等)对应的地球参考框架中确定的观测坐标 $[X^0 \quad Y^0 \quad Z^0]^{\mathrm{T}}$ 通过平移(ΔX^0、ΔY^0、ΔZ^0)、旋转(ε_X^0、ε_Y^0、ε_Z^0)和尺度比(m^0)改正得到的测站坐标,即

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} + R_Z(\varepsilon_Z^0) \cdot R_Y(\varepsilon_Y^0) \cdot R_X(\varepsilon_X^0) \begin{bmatrix} X^0 \\ Y^0 \\ Z^0 \end{bmatrix} + m^0 \begin{bmatrix} X^0 \\ Y^0 \\ Z^0 \end{bmatrix} \tag{7-34}$$

式(7-33)和式(7-34)是用于实现 CTRF 的观测方程。式中,未知参数是 $[X \quad Y \quad Z]_{\text{CTRF}}^{\mathrm{T}}$ 和 $[\delta X \quad \delta Y \quad \delta Z]^{\mathrm{T}}$,它们定义了 CTRF;$\Delta X^0$、$\Delta Y^0$、$\Delta Z^0$、$\varepsilon_X^0$、$\varepsilon_Y^0$、$\varepsilon_Z^0$ 和 m^0 则给出了 CTRF 与技术“0”对应的地球参考框架间的关系。

实际应用中,通常对新建立的 ITRF 的原点、尺度和定向给出某种具体的要求。

对于 ITRF 的坐标原点,按照 ITRS 的定义,应位于整个地球的质量中心。由于 SLR 是动力学技术,能以较高精度确定地球质心,所以 ITRF 的坐标原点可由该技术确定。方法是使参加平差的某个 SLR 网的平移参数为 0 或使参加平差的几个 SLR 网的平移参数的加权和为 0。

对于 ITRF 的尺度,按定义应为引力相对论意义上的局部地球框架的尺度。实用中是由各分析中心在数据处理时采用的光速 c、地球引力常数 GM 以及某种相对论改正模型来确定。上述数值和模型不同,各网的尺度也不同,目前各分析中心一般都采用 IERS 规范的推荐值,所以各网的尺度差并不大。新的 ITRF 的尺度一般是选用某个网的尺度,或多个网的尺度的带权平均。

对于 ITRF 的定向,一般是将定向参数作为已知值处理。

当前的 ITRF 实现,如 ITRF2000、ITRF2005 等,其输入数据、数学模型、解算参数类型以及解算方法等,都较早期的 ITRF 实现要复杂得多,但基本思想仍是相似的。为便于理解,下面以早期 ITRF91 的实现为例说明 ITRF 的实现过程。

表 7-1 列出了参加建立 ITRF91 的全部 16 个网,表中序号 1～5 为 VLBI 网,6～12 为 SLR 网,13～15 为 LLR(激光测月)网,16 为 GPS 网。对全部数据实时联合平差最终建立 ITRF91。

联合平差所采用的参考系定义为:

参考系原点由 SLR 确定;尺度也由 SLR 确定(因 SLR 的尺度已与 VLBI 一致);定向与 ITEF90 一致。

联合平差实现该参考系的方法是:

(1)令 SSC(CSR)92L01 网(表 7-1 序号 6)的转换参数均为 0,即在 SSC(CSR)网所实现的参考系中实施平差,平差结果是使原点、尺度、定向均与 SSC(CSR)一致。其结果定义为

ITRF91A。显然除定向外,ITRF91A 的原点及尺度已满足了 ITRF91 的定义。

(2)解 ITRF91A 与 ITRF90 的 7 个转换参数,以获得定向改正参数,其值见表 7-2。

(3)取 SSC(CSR)的平移参数和尺度比参数均为 0,旋转角取表 7-2 的 $R1$ 、 $R2$ 、 $R3$(见表 7-1 序号 6),对全部数据再次实施联合平差。平差结果所得各网的转换参数见表 7-1。

表 7-1 ITRF91 的建立

序号	网名	T1 /cm	T2 /cm	T3 /cm	D (10^{-8})	R1 (0.001″)	R2 (0.001″)	R3 (0.001″)
1	SSC(GSFC)92R03	0.3	−1.2	−2.8	−0.05	1.1	1.2	−2.5
2	SSC(NOAA)92R01	2.1	0.4	−2.2	0.08	4.6	9.9	−0.2
3	SSC(USNO)92R01	1.9	−4.4	0.8	−0.42	−0.4	−0.2	−0.2
4	SSC(NAOMZ)92R01	3.3	−2.9	−4.8	0.06	−1.3	−1.0	−0.5
5	SSC(JPL)92R01	−1.9	1.1	−1.7	−0.50	2.5	1.1	0.7
6	SSC(CSR)92L01	0.0	0.0	0.0	0.00	−0.4	0.4	−0.9
7	SSC(GSFC)92L01	−2.9	−1.4	0.3	0.31	−0.3	5.7	−7.3
8	SSC(DGFII)92L01	0.7	−3.0	0.0	−0.37	−284.4	−44.5	5.7
9	SSC(DUT)92L01	0.1	0.6	−3.8	−0.65	0.8	1.7	−4.6
10	SSC(GFZ)92L01	−0.1	−0.2	3.0	0.06	0.1	0.1	−0.2
11	SSC(GAOUA)92L01	−1.4	0.4	−7.2	−0.52	0.3	0.4	−1.4
12	SSC(NAL)92L01	0.4	−0.6	−3.5	0.08	1.0	1.6	0.6
13	SSC(UTXMO)92M01	−0.1	−3.5	17.6	−3.20	−6.5	0.8	38.5
14	SSC(JPL)92M01	−6.5	−1.2	4.7	−1.97	−1.0	1.4	−44.7
15	SSC(SHA)92M01	−6.8	−0.5	1.9	−2.75	−0.3	0.1	3.2
16	SSC(JPL)01P01	−6.7	14.8	−17.0	−0.14	−0.4	−0.7	61.5

注:T 为平移参数;D 为尺度参数;R 为定向参数。

表 7-2 ITRF91A 、 ITRF90 间的转换参数

T1 /cm	T2 /cm	T3 /cm	D (10^{-8})	R1 (0.001″)	R2 (0.001″)	R3 (0.001″)
−0.1	0.4	1.5	−0.02	−0.4	0.4	−0.9

CTRF 是四维的,或者说是动态的,其动态特征表现在 CTRF 是由具有参考历元的坐标和速度构成。随时间变化(即动态性)是 CTRF 的固有性质。一方面,板块运动、地壳形变等地球动力学因素的影响使固体地球表面点的瞬时位置不断变化,需要同时给出点的站坐标和站速度;另一方面,新的观测资料不断精化、新的观测站点不断增加,需要定期发布新的坐标和速度计算结果。

CTRF 的维持,即其动态特征的保持,目前主要依靠实测速度场来体现。例如 GPS 连续运行基准站网具有大量连续观测的数据,可计算出站点的运动速度,为地球参考框架的维持提供实测数据。

四、 国际地球参考框架 ITRF 和世界大地坐标系 WGS 84

(一)ITRF

1. ITRF 的建立

ITRF 是国际地球参考系(ITRS)的实现。ITRS 的定义与 CTRS 的定义一致。ITRF 的建立是通过一组站的坐标(Sets of Station Coordinate,SSC)和速度来完成的,这些站的坐标和

速度通过 VLBI、SLR、LLR、GPS(起于 1991 年)和 DORIS(起于 1994 年)等空间大地测量手段得到。计算的 ITRF 解发表在 IERS 的年度报告上,已有的 ITRF 解有 ITRF 0、ITRF 88、ITRF 89、ITRF 90、ITRF 91、ITRF 92、ITRF 93、ITRF 94、ITRF 96、ITRF 97、ITRF 2000 和 ITRF 2005。计算 ITRF 的基本步骤如下:

首先,利用站集的速度模型将各分析中心提供的 SSC 解归化至某一参考历元 t_0;然后进行联合平差,得到 ITRF 站坐标和每一组 SSC 相对于 ITRF 联合解的 7 个转换参数;ITRF 点的速度通过两种方式算得:一种方法是同计算站坐标一样,不过它的模型是由坐标转换公式导出的;另一种方法是通过对两个历元的位置求导得到。

ITRF 站点坐标如需用大地坐标形式表示,IERS 推荐采用全球通用的 GRS 的大地测量基本常数,目前采用的 GRS 80 是 IUGG1979 年推荐的,其椭球参数是

$$a = 6\,378\,137 \text{ m}$$
$$\alpha = 1 : 298.257\,2$$
$$GM = 3.986\,005 \times 10^{14} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$$
$$\omega = 7.292\,115 \times 10^{-5} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. ITRF 与 IGS

随着国际 GPS 服务(IGS)的建立,ITRF 与 GPS 的关系变得更加密切。IGS 同 ITRF 紧密合作,一方面 ITRF 为 IGS 提供绝对的长期基准,另一方面 IGS 提供全球 GPS 观测数据并改进 ITRF 解。

假设某一 GPS 会战的参考历元是 T_c,要求利用这一会战的观测数据和精密星历计算测站坐标。人们可能会遇到两种精密星历:一种是基于 WGS 84 坐标系的星历,另一种是基于 ITRF 的星历(如 IGS 精密星历)。使用坐标系不同的精密星历,得到的测站坐标将属于不同的坐标系。

如果使用 IGS 精密星历(假设它的参考框架为 ITRFyy,yy 表示年),应该采用已知点在 ITRFyy 参考框架中的坐标(参考历元为 T_0),并根据已知点在 ITRFyy 中的速度将坐标从 T_0 归化至观测历元 T_c,如果必要的话,此时再对归化后的已知点坐标施加约束,这样得到的未知点坐标属于 IGS 精密星历所采用的 ITRF 参考框架。

3. *ITRF 在建立和维持地区性大地坐标系中的作用*

按定义,地心坐标系应该是唯一的,但由于实现方法和资料的不同,会产生各个地心坐标系。由于 ITRS 地心精度高,全球分布且权威性大,其他地心系都在向它靠拢,如 WGS 84 的两次改进、欧洲的 EUREF 融入 ITRF 等。世界各国在处理本国 GPS 数据时,也都将 ITRF 站坐标以强约束,使国家坐标系接近或属于 ITRF 框架。

目前 ITRF 站点的点位精度优于 1 cm,点位速度精度优于 3 mm/a。利用这些点作为起始站,采用 GPS 相对定位技术,在某一地区进行 GPS 观测,经过数据处理,便可以获得该地区高精度的点位站坐标,即在该地区建立了基于 GPS 技术的地心坐标系。

ITRF 在地区坐标系的建立和维持中起着重要的作用:

(1)地区坐标系建立时用到了 IGS 的精密星历和地球定向参数(EOP),而 IGS 精密星历的参考框架是属于 ITRF 的。

(2)地区坐标系建立所用的起始站为 ITRF 框架中的站点;计算时大多给这些站以很强的约束,这样建立的坐标系应与 ITRF 有很好的一致性。因此,近年建立的各种地区坐标系都明

确指出，该坐标系与 ITRF 一致，如 EUREF 固联于欧洲板块并且同 ITRF 在参考历元 1989.0 一致等。

虽然地区性地心坐标系在建立时均采用 ITRF 站作为起始站，但这些站点的选择方案却大有不同。可以是将该地区内和其周围 ITRF 点给以强约束，如南美洲参考框架 SIRGAS；也可以选择不同板块上部分稳定的 ITRF 点给以强约束，如 EUREF。起始点选择的不同，所建立的参考系也就有所不同，而且这些差异常常是系统性的。

(二)WGS 84

从 20 世纪 60 年代开始，为建立全球统一的大地坐标系，原美国国防部制图局(DMA)就曾建立了 WGS 60，随后又推出了改进的 WGS 66 和 WGS 72。80 年代中期，推出了 WGS 84 坐标系。WGS 84 坐标系是一个协议地球参考系，此外，WGS84 还包括参考椭球、基本常数、地球重力场模型和全球大地水准面模型，所以实际上 World Geodetic System(WGS)应直译为“世界大地测量系统”。

WGS 84 参考框架是由一组全球分布的监测站坐标实现的。为了建立与 ITRF 相一致的 WGS 84 参考系，美国在 1994 年和 1996 年两次对 WGS 84 进行了精化，精化后的计算结果表明：基于 WGS 84 参考框架计算的 GPS 卫星的 NIMA 的精密星历与基于 ITRF 94 的 IGS 精密星历的系统差不超过 2 cm，WGS 84 与 ITRF 94 地面点坐标分量的一致性在 5 cm 水平。因此对于大多数精度要求低于厘米级的应用而言，WGS 84 与 ITRF 可以认为是同一参考框架。

WGS 84 椭球的四个基本常数是

长半轴　$a = 6\,378\,137.0\ \mathrm{m}$

扁率　$\alpha = 1/298.257\,223\,563$

地球引力常数　$GM = 3\,986\,004.418 \times 10^{8}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}$

地球自转角速度　$\omega = 7\,292\,115.0 \times 10^{-11}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

§7-5　我国的大地坐标系

一、1954 北京坐标系

1954 北京坐标系(简称“BJS 54”)实际上是苏联 1942 年普尔科沃坐标系在中国的延伸。因此，先讨论后者。

1946 年以前，苏联采用 1932 年普尔科沃坐标系。该坐标系大地原点设在普尔科沃天文台圆形大厅中心，采用贝塞尔椭球参数，基本上是一点定位，只是起始大地方位角是根据天文大地网中 45 个拉普拉斯方位角，通过平差计算得到的。

这个坐标系对苏联来说并不合适。首先，贝塞尔椭球的长半轴太小，误差约有 800 m；其次，参考椭球的定位也不合适，在远东地区大地水准面偏离参考椭球面差达 410 m。为此，在 1932 年普尔科沃坐标系的基础上，改用克拉索夫斯基椭球参数，仍以普尔科沃为大地原点，进行多点定位，建立了 1942 年普尔科沃坐标系。

20 世纪 50 年代，在我国天文大地网建立初期，为了迅速发展我国测绘事业，全面开展测图工作，迫切需要建立一个大地坐标系。为此，1954 年总参谋部测绘局在有关方面的建议与支持下，鉴于当时的历史条件，采取先将我国一等锁与苏联远东一等锁相连接，然后以连接处

呼玛、吉拉林两基线网扩大边端点和绥芬河地区两个三角点的苏联 1942 年普尔科沃坐标系的坐标为起算数据，平差我国东北及东部地区一等锁，这样传算来的坐标系，定名为 1954 北京坐标系。由此可见，1954 北京坐标系是苏联 1942 年普尔科沃坐标系在我国的延伸。但是，严格说来和 1942 年普尔科沃坐标系还存有一些小的差异，例如，其中高程异常是以苏联 1955 年大地水准面重新平差结果为起算值，按我国天文水准路线推算出来的；大地点高程是以 1956 年青岛验潮站求出的黄海平均海水面为基准等。

总结 1954 北京坐标系的要点是

(1)属参心大地坐标系。

(2)采用克拉索夫斯基椭球参数

长半轴　$a=6\,378\,245$ m

扁　率　$\alpha=1:298.3$

(3)多点定位。η_0、ξ_0 由 900 个点(在苏联)按 $\sum_{1}^{900}[(\eta-\eta_g)^2+(\xi-\xi_g)^2]=$ 最小解得。式中，η_g、ξ_g 是用重力方法得出的重力垂线偏差分量。大地原点的大地水准面差距 N_0 由 43 点(在苏联天文大地网中均匀选取)按 $\sum_{1}^{43}N'^2=$ 最小解得。

(4) $\varepsilon_X=\varepsilon_Y=\varepsilon_Z=0$。

(5)大地原点在苏联的普尔科沃。

(6)高程异常是以苏联 1955 年大地水准面重新平差结果为起算值，按我国天文水准路线推算出来的。

(7)1954 北京坐标系建立后，提供的大地点成果是局部平差结果。

1954 北京坐标系在全国的测绘生产中发挥了巨大的作用。15 万个国家大地点以及数十万个军控点、炮控点、测图控制点均按此坐标系统计算。以 1954 北京坐标系为基础的测绘成果和文档资料，已应用到经济建设和国防建设的许多领域，特别是用它测制的全国 1：5 万及 1：10 万比例尺地形图的任务已基本完成，1：1 万比例尺地形图也在相当范围内得以完成。

1954 北京坐标系存在的缺点和问题是

(1)克拉索夫斯基椭球参数同现代精确确定的椭球参数相比，长半轴约大 108 m(与 GRS 80 比较)。

(2)只涉及两个几何性质的椭球参数 (a,α)，满足不了当今理论研究和实际工作中所需的描述地球椭球的 4 个基本参数(长半轴 a，地球重力场二阶带球谐系数 J_2，地心引力常数 GM 和地球自转角速度 ω)的要求。

(3)大地测量计算中采用克拉索夫斯基椭球，而处理重力数据时采用的是赫尔默特 1901～1909年正常重力公式

$$\gamma_0=978\,030(1+0.005\,302\sin^2\varphi-0.000\,007\sin^2 2\varphi)$$

因此，不能把克拉索夫斯基椭球的两个几何参数 a 和 α，同赫尔默特正常重力公式两个物理参数 $\gamma_e=978\,030$ mGal，$\beta=0.005\,302$ 合并在一起，作为几何大地测量和物理大地测量统一使用的参数。

(4)1954 北京坐标系所对应的参考椭球面与我国大地水准面存在着自西向东明显的系统性倾斜，在东部地区高程异常最大达＋65 m，全国范围平均为 29 m，参见图 7-8。

(5)定向不明确。椭球短轴的指向既不是国际上普遍采用的国际协议原点 CIO,也不是我国地极原点 $JYD_{1968.0}$;起始大地子午面也不是平行于国际时间局 BIH 所定义的格林尼治平均天文台子午面,从而给坐标换算带来一些不便和误差。

(6)1954 北京坐标系坐标与 1980 西安坐标系坐标相比较,前者未经整体平差,是局部平差值,后者是整体平差值,因此,前者精度不及后者高。按局部平差逐级提供大地点成果,不可避免地会出现一些矛盾和不合理的情况。

(7)并非是我国独立建立的坐标系,大地原点不在北京,名不副实,容易引起一些误解。在解释其定义时,也不够简单明了。

当然应该指出,这些问题是由于历史原因造成的,对于一个初建天文大地网的国家是难以避免的。

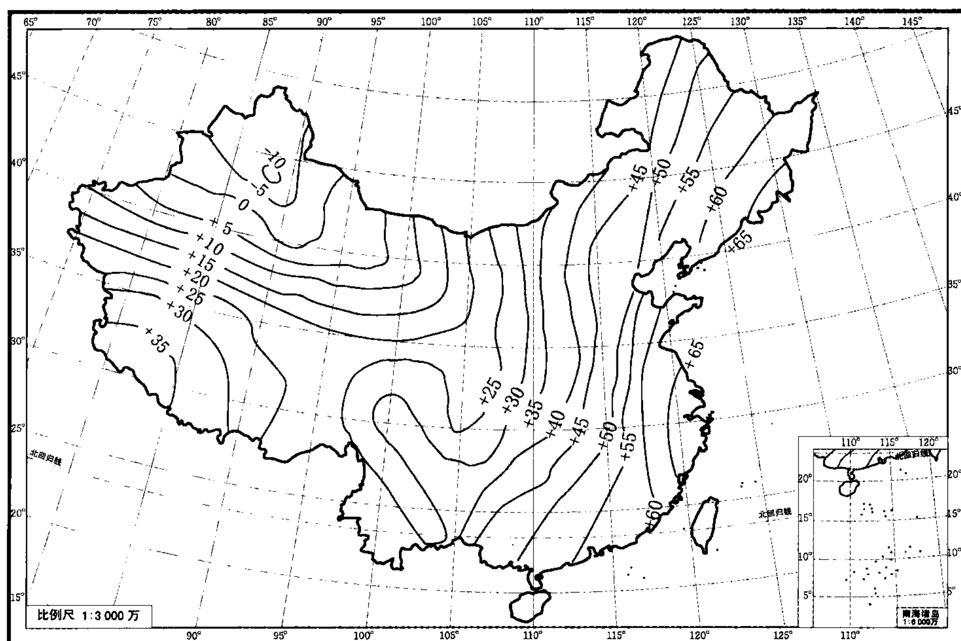


图 7-8　1954 北京坐标系大陆部分的大地水准面

二、1980 国家大地坐标系(1980 西安坐标系)

早在 20 世纪 60 年代初期,全国天文大地测量初具规模时,针对 1954 北京坐标系存在的缺点和问题,一些专家、学者已开始着手研究利用我国天文大地测量资料,推算和我国大地水准面较为密切的椭球参数,并获得了一些初步结果。

1978 年 4 月在西安召开了全国天文大地网整体平差会议,与会专家、学者对建立我国新的大地坐标系作了充分的讨论和研究,认为 1954 北京坐标系在技术上存在一些缺点,建立我国新的大地坐标系是必要的、适时的。在会议纪要中,关于建立大地坐标系的问题,明确了以下原则:

(1)全国天文大地网整体平差要在新的参考椭球面上进行。为此,首先建立一个新的大地坐标系,并命名为 1980 国家大地坐标系(后来在实用中人们常称为 1980 西安坐标系,简称“XAS 80”)。

(2)1980 国家大地坐标系的大地原点建在我国中部西安附近,具体地点是陕西省泾阳县永乐镇。

(3)国际大地测量与地球物理联合会 1975 年推荐的地球椭球参数,综合了世界上的最新数据,1980 国家大地坐标系采用其 4 个基本参数 (a, J_2, GM, ω)。并根据这些参数推算地球扁率,赤道正常重力值和正常重力公式的各项系数。

(4)1980 国家大地坐标系的椭球短轴平行于由地球质心指向地极原点 $JYD_{1968.0}$ 方向,大地起始子午面应平行于格林尼治平均天文台的子午面。

(5)椭球定位参数以我国范围内高程异常值平方和最小为条件求定。

(6)考虑到经典大地测量和空间大地测量的不同需求,本着独立自主、自力更生、有利保密、方便使用的原则,分别建立两套坐标系,即 1980 国家大地坐标系和地心坐标系。前者根据定位条件,必然属参心坐标系,应该保持其在相当长时期内稳定不变,供全国各部门使用;后者在 1980 国家大地坐标系的基础上,通过精确求定坐标转换参数,换算成地心坐标,以满足我国远程武器和空间技术发展的需要。地心坐标转换参数,可随着测绘技术的不断发展和通过综合利用不断增加的天文、大地、重力和卫星大地测量资料而不断精化。

会后,有关部门按上述原则,建立了 1980 国家大地坐标系。

1980 国家大地坐标系的建立是在 1954 北京坐标系的基础上完成的。其建立原理见 § 7-3。

采用的弧度测量方程是式(7-31),由于采用正常高系统,故以 ζ 代 N,又采用 Δe^2 代 Δa,得

$$\zeta_{1980} = \cos B_{1954} \cos L_{1954} \Delta X_0 + \cos B_{1954} \sin L_{1954} \Delta Y_0 + \sin B_{1954} \Delta Z_0 - W_{1954} \Delta a + \frac{1}{2} N_{1954} \sin^2 B_{1954} \Delta e^2 + \zeta_{1954} \tag{7-35}$$

由于已明确采用 IUGG 1975 年推荐的椭球参数,故 $\Delta a = a_{\text{IUGG 1975}} - a_{\text{克氏}}$,$\Delta e^2 = e^2_{\text{IUGG 1975}} - e^2_{\text{克氏}}$ 均为已知值。

ζ_{1954} 的求解方法是:用 1 167 个天文点和约 15 万个重力点成果,在全国由天文重力水准路线,短边天文水准路线和天文水准加均衡改正的路线构成 21 个环,进行不等权平差求得各路线高程异常差,再以原点的 ζ 为起算值逐一推求,最后绘制成全国高程异常 ζ_{1954} 图。

在全国按 1°×1°间隔,均匀选取 922 点,组成如式(7-35)的弧度测量方程式,按

$$\sum_1^{922} \zeta^2_{1980} = 最小$$

解算得定位元素 ΔX_0、ΔY_0 和 ΔZ_0。再代入式(7-28),进而得大地原点上的 $\eta_{0(1980)}$、$\xi_{0(1980)}$ 和 $\zeta_{0(1980)}$ 值。根据大地原点上测得的天文经度 λ_0、天文纬度 φ_0、大地原点至另一点的天文方位角 α_0 和正常高 $H_{常0}$,按式(7-26) 最后得大地原点上的 $L_{0(1980)}$、$B_{0(1980)}$、$A_{0(1980)}$ 和 $H_{0(1980)}$,作为 1980 国家大地坐标系的大地起算数据。

我国在 1980 国家大地坐标系中没有采用 CIO,而是采用 $JYD_{1968.0}$ 作为地极坐标的原点。其中 JYD 为极原点三个字的汉语拼音字头。这个地极坐标系统,是我国极移协作小组(参加单位有南京大学天文系、上海天文台、陕西天文台、武昌时辰站和天津纬度站等),在 1977 年利用 1949~1977 年期间的国外 36 个台站的光学仪器的测纬资料,分别就地极的长期与周期分量进行分析研究后建立起来的,并由天津纬度站以基本上相同的台站、仪器的后续测纬资料与数学处理方式,进行着系统的保持工作。

应当肯定，就利用光学技术确定地极系统而言，$JYD_{1968.0}$的精度是比较好的，系统也相当稳定。其内部精度和BIH的CIO系统相当，同BIH和IPMS等比较，外部符合的平均偏差小于0.02″。

$JYD_{1968.0}$虽然用于我国1980国家大地坐标系，但是在天文界和测绘界，对它的采用一直存在着争议，特别是随着空间大地测量技术的完善，传统的光学天体测量方法已被新技术所替代。鉴于JYD系统是依靠光学手段保持的地极系统，不能适应当代建立高精度参考系的要求；加之，JYD并不是真正独立的地极系统，而国外光学测纬资料已濒于枯绝，因此该系统很难得以维持。所以，变更地极原点使之与国际系统相一致是必然的。

还要说明，1980国家大地坐标系是在明确采用IUGG 1975年推荐的椭球参数基础上，按我国范围内的高程异常值平方和为最小进行椭球定位的，即只解算式(7-35)中ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0三个未知数。如果对椭球参数事先不加固定，按式(7-35)解算，则可得ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0、Δa、Δe^2等5个参数。这样定位的结果，显然椭球面和我国大地水准面(或似大地水准面)更为密合。据1964～1977年几次计算结果表明，a值在6 378 666～6 378 685间，α值在1∶291.6～1∶292.2间。从中可见，仅根据我国局部地区大地水准面推算的椭球和当代按全球资料推得的椭球，其长半轴要大500多米，扁率的分母相差达6个单位左右，这是由于我国范围内地形环境极其复杂的缘故。所以，在1980国家大地坐标系中，没有采用根据我国局部地区大地水准面推算的椭球参数。

总结1980国家大地坐标系的要点是

(1)属参心大地坐标系。

(2)采用既含几何参数又含物理参数的4个椭球基本参数。数值采用1975年国际大地测量与地球物理联合会第16届大会的推荐值，即

椭球长半轴　$a = 6\,378\,140$ m

地心引力常数　$GM = 3.986\,005 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3 s^{-2}}$

地球重力场二阶带谐系数　$J_2 = 1.082\,63 \times 10^{-3}$

地球自转角速度　$\omega = 7.292\,115 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

根据以上4个参数可进一步求出

地球椭球扁率　$\alpha = 1 : 298.257$

赤道上的正常重力　$\gamma_e = 978.032$ Gal

极点的正常重力　$\gamma_p = 983.212$ Gal

正常重力公式中的系数　$\beta = 0.005\,302$，$\beta_1 = -0.000\,005\,8$

正常椭球面上重力位　$U_0 = 626\,368\,3$ kGalm

(3)多点定位。在我国按1°×1°间隔，均匀选取922点，组成弧度测量方程，解得大地原点上的ξ_0、η_0和ζ_0的值是

$$\xi_0 = -1.9'', \quad \eta_0 = -1.6'', \quad \zeta_0 = -14.0\ \mathrm{m}$$

(4)定向明确。地球椭球的短轴平行于由地球质心指向$JYD_{1968.0}$的方向，起始大地子午面平行于我国起始天文子午面，$\varepsilon_X = \varepsilon_Y = \varepsilon_Z = 0$。

(5)大地原点在我国中部地区，推算坐标的精度比较均匀，位于陕西省泾阳县永乐镇，在西安市以北60 km，可简称西安原点。大地经纬度的概略值是$L_0 = 108°55'$，$B_0 = 34°32'$。

(6)1980国家大地坐标系建立后，用它计算了全国天文大地网整体平差近5万个点的

成果。

将 1980 国家大地坐标系和 1954 北京坐标系相比较，前者优于后者是比较明显的。例如，完全符合建立经典参心大地坐标系的原理，容易解释；地球椭球的参数个数和数值大小更加合理、准确；坐标系轴的指向明确；椭球面与大地水准面密合较好，全国平均差值由 1954 北京坐标系 29 m 减至 10 m，最大值出现在西藏西南角，全国广大地区多数在 15 m 以内，见图 7-9。

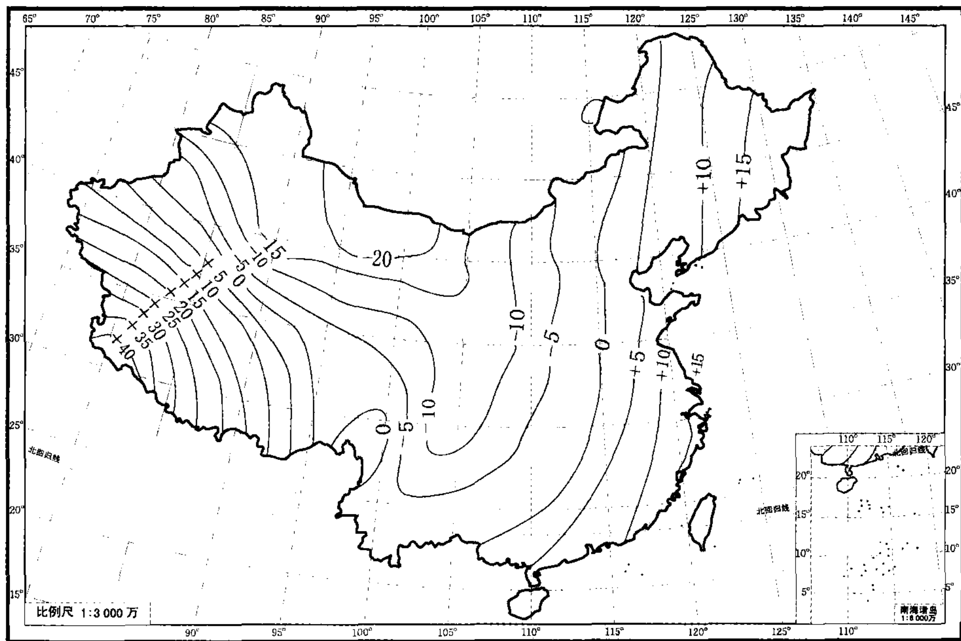


图 7-9　1980 国家大地坐标系大陆部分的大地水准面

此外，由于严格地进行观测数据归算，全国统一整体平差，消除了分区局部平差不合理的控制影响，提高了平差结果的精度。

椭球参数和定位的改变，必将引起大地坐标的变化。显然，这将使图廓线的位置改变。改变大小随点位而异，对于我国东经 102°以东地区，其变化最大约为 80 m，平均约为 60 m。图廓线位置的变化，使新测地形图接边时产生裂隙。如 80 m 的变化，在 1∶5 万地形图上表现为 1.6 mm。方里线位置的改变，不仅与大地坐标的变化有关，而且还将包括因椭球参数的改变所带来的投影后平面坐标变化的附加影响。如当大地经度为 116°、大地纬度为 46°时，方里线在 x、y 方向上分别变化值为 46 m 和 55 m，在1∶5万地形图上分别产生 0.9 mm 和 1.1 mm 的改变。启用 1980 国家大地坐标系后，带来的最大问题就是地形图图廓线和方里线位置的改变，给新旧大地坐标系所测地形图的拼接带来麻烦。

三、新 1954 北京坐标系

1980 国家大地坐标系在当时所具备的科学性、严密性和先进性是大家一致公认的。而 1954 北京坐标系提供的是局部平差成果，弊病很多，不宜再继续采用。但是，如将 1980 国家大地坐标系代替 1954 北京坐标系用作为测图坐标系（特别是 1∶5 万以下比例尺地形图），则新旧坐标系的衔接存在较大的工作量问题。因此，启用一个新的测图坐标系，既要考虑其科学性、严密性，又要考虑实用性、可行性、经济效益和社会效益；既要考虑 30 多年来测绘历史和现

状，又要考虑今后的发展。

新 1954 北京坐标系（又称 1954 北京坐标系）就是在这样的背景下产生的。这个坐标系提供的成果，是在 1980 国家大地坐标系的基础上，将 IUGG 1975 年椭球改换成原来的克拉索夫斯基椭球，通过在空间三个坐标轴上进行平移转换而得到的。因此，其坐标不但体现了整体平差成果的优越性，即其精度和 1980 国家大地坐标系坐标精度一样，克服了原 1954 北京坐标系局部平差的缺点；又由于椭球参数恢复为原 1954 北京坐标系的椭球参数，定位接近于原 1954 北京坐标系，从而使其坐标值和原 1954 北京坐标系局部平差坐标值相差较小。据统计，对于投影平面坐标来说，两者坐标差值在全国约 80％地区在 5 m 以内，超过 5 m 的主要集中在东北地区，其中大于 10 m 的点仅在少数边沿地区，最大差值 12.9 m。纵坐标 x 差值在－6.5～＋7.8 m；横坐标 y 差值在－12.9～＋9.0 m。这样的差异实际并没有超过以往资用坐标与平差坐标之差的范围。反映在1∶5万地图上，绝大部分不超过 0.1 mm，这样新旧图拼接将不会产生明显裂隙。因此，新图既实现了使用精度高的整体平差成果作为控制基础，又不必作特殊处理就能和旧图互相拼接，具有明显的经济效益。特别是在军队系统，因为用图量、存图量最多的是1∶5万以下比例尺地图，采用这种坐标系作为制图坐标系，对于地图更新、战时快速保障和方便广大指战员用图等方面，具有明显的优点。

1954 北京坐标系、1980 国家大地坐标系和新 1954 北京坐标系间的关系，可以形象地用图 7-10表示。

图 7-10 中，$O_{1980}-X_{1980}Y_{1980}Z_{1980}$ 为 1980 国家大地坐标系对应的空间直角坐标系。$O_{新1954}-X_{新1954}Y_{新1954}Z_{新1954}$ 为新 1954 北京坐标系对应的空间直角坐标系。$O_{1954}-X_{1954}Y_{1954}Z_{1954}$ 为原 1954 北京坐标系对应的空间直角坐标系，Z_{1954} 轴指向不明确，它不是指向平行于地球质心至 $JYD_{1968.0}$方向，它采用克拉索夫斯基椭球参数，为使图清晰，未绘出椭球大小。$O_{新1954}-X_{新1954}Y_{新1954}Z_{新1954}$ 和 $O_{1980}-X_{1980}Y_{1980}Z_{1980}$ 坐标轴平行，它们的 Z 轴指向平行于地球质心至 $JYD_{1968.0}$ 方向，X 轴位于起始大地子午面。

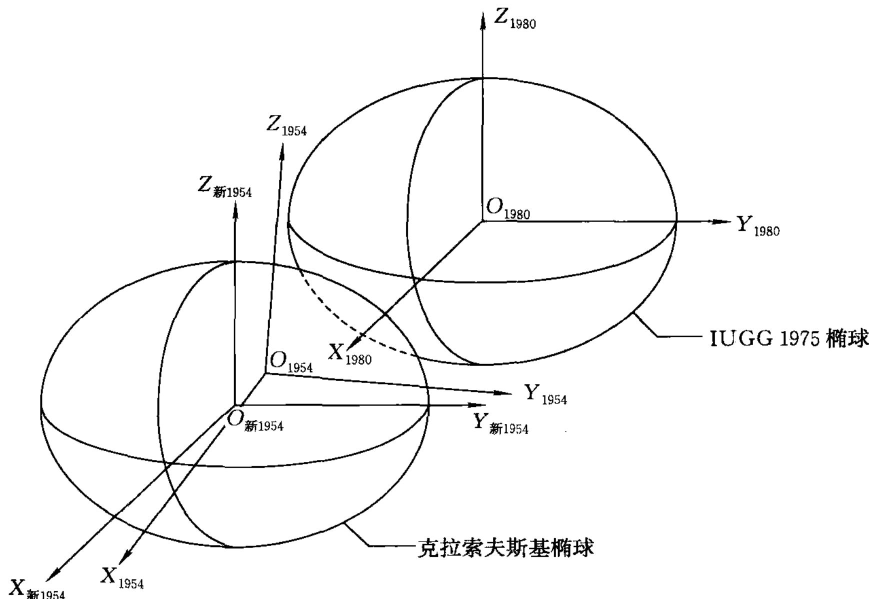


图 7-10　我国三种参心大地坐标系的关系

由图可见,新 1954 北京坐标系是将 1980 国家大地坐标系采用的 IUGG 1975 椭球参数换成克拉索夫斯基椭球参数后,在空间平移后的一种参心大地坐标系,其平移量为 1980 国家大地坐标系按式(7-35)解得的定位参数 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0(本身有正负)的值反号。

因此,对于两种空间直角坐标系的变换公式是

$$\left.\begin{aligned} X_{新1954} &= X_{1980} - \Delta X_o \\ Y_{新1954} &= Y_{1980} - \Delta Y_o \\ Z_{新1954} &= Z_{1980} - \Delta Z_o \end{aligned}\right\} \tag{7-36}$$

对于两种参心大地坐标的变换公式是

$$\left.\begin{aligned} L_{新1954} &= L_{1980} - \mathrm{d}L \\ B_{新1954} &= B_{1980} - \mathrm{d}B \\ H_{新1954} &= H_{1980} - \mathrm{d}H \end{aligned}\right\} \tag{7-37}$$

式中

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}B \\ \mathrm{d}H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin L}{(N+H)\cos B}\rho'' & \dfrac{\cos L}{(N+H)\cos B}\rho'' & 0 \\ -\dfrac{\sin B\cos L}{M+H}\rho'' & -\dfrac{\sin B\sin L}{M+H}\rho'' & \dfrac{\cos B}{M+H}\rho'' \\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B \end{bmatrix}_{1980} \begin{bmatrix} \Delta X_o \\ \Delta Y_o \\ \Delta Z_o \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{N}{(M+H)a}e^2\sin B\cos B\rho'' & \dfrac{M(2-e^2\sin^2 B)}{(M+H)(1-\alpha)}\sin B\cos B\rho'' \\ -\dfrac{N}{a}(1-e^2\sin^2 B) & \dfrac{M}{1-\alpha}\rho''(1-e^2\sin^2 B)\sin^2 B \end{bmatrix}_{1980} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} \tag{7-38}$$

应该指出,在按式(7-35)依据 $\sum\limits_{1}^{922}\xi_{1980}^2 =$ 最小,解得定位元素 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0 时,并没有顾及 1980 国家大地坐标系和 1954 北京坐标系间轴向不一致带来的欧勒角,因此,所得 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0 值,严格说来,不是上述两种大地坐标系参心 O_{1980} 和 O_{1954} 间三个直角坐标分量,为此,当将 ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0 值反号转换至新 1954 北京坐标系时,其参心位置是 $O_{新1954}$,而不是 O_{1954},即新 1954 北京坐标系和 1954 北京坐标系两个参心不重合,虽然其差异是十分微小的。

1980 国家大地坐标系的大地原点在西安,以原点大地起算数据,整体平差了全国大地网。而新 1954 北京坐标系坐标是从 1980 国家大地坐标系坐标转换而来的,因此新 1954 北京坐标系大地原点仍是西安原点,但两种参心坐标系大地起算数据不同,其差异可以按式(7-38)计算,据计算两者大地经度相差−2.19″,两者大地纬度相差 0.39″。

总结新 1954 北京坐标系的要点是

(1)属参心大地坐标系。

(2)采用克拉索夫斯基椭球参数

长半轴　$a = 6\ 378\ 245$ m

扁　率　$\alpha = 1 : 298.3$

(3)多点定位。参心虽和 1954 北京坐标系参心不相一致,但十分接近。

(4)定向明确。地球椭球的短轴平行于由地球质心指向 JYD 1968.0 方向,起始大地子午面平行于我国定义的起始天文子午面,$\varepsilon_X = \varepsilon_Y = \varepsilon_Z = 0$。

(5)大地原点位于陕西省泾阳县永乐镇，但和1980国家大地坐标系的大地起算数据不同。

(6)提供的坐标是1980国家大地坐标系整体平差转换值。坐标精度和1980国家大地坐标系完全一样。

(7)用它作为测图坐标系，对于1∶5万以下比例尺测图，新旧图接边，不会产生明显裂隙。

新1954北京坐标系的优点在于不但避免了原1954北京坐标系局部平差成果精度不高等矛盾，而且用它测制的新地形图和旧地形图相拼接，在一般情况下，对于1∶5万以下比例尺地图，不产生明显的裂隙。但是，采用新1954北京坐标系对于1∶2.5万、1∶1万等大比例尺测图，在新旧地形图拼接时仍会产生裂隙；加之，从生产和科学发展需求来看，数字产品将代替模拟产品。因此，新1954北京坐标系在测图领域并未实际应用。

四、1978地心坐标系

1978地心坐标系是将1954北京坐标系通过地心一号(DX-1)坐标转换参数转换得到的地心坐标系。

DX-1共有3个参数，即平移参数($\Delta X_0,\Delta Y_0,\Delta Z_0$)。DX-1转换参数是1978年11月在有关会议上确定建立的。鉴于当时卫星大地测量技术刚刚起步，无法直接测得地心坐标，DX-1是通过5种方法建立的。这5种方法是

(1)天文重力法；

(2)全球天文大地水准面差距法；

(3)天文大地水准面与重力大地水准面差距之差法；

(4)用MX-702A等多普勒接收机测定子午卫星系统建立地心坐标；

(5)用CMA-722B多普勒接收机测定子午卫星系统建立地心坐标。

各种方法均可独立获得平移参数，分别给这5种方法以不同的权值，取权中数得DX-1 3个平移参数ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0。

ΔX_0、ΔY_0、ΔZ_0 3个平移参数表示1954北京坐标系中心相对于地心坐标系中心的位移，即1954北京坐标系中心在地心坐标系中的3个坐标分量。利用这组参数得到的地心坐标系就定名为1978地心坐标系。

有了DX-1转换参数，可以将1954北京坐标系的大地空间直角坐标变换为1978地心坐标系的地心大地空间直角坐标

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{1978} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{1954} + \begin{bmatrix} \Delta X_o \\ \Delta Y_o \\ \Delta Z_o \end{bmatrix}_{DX-1} \tag{7-39}$$

DX-1不包含旋转参数和尺度变化参数。它只是一个初步结果，以满足当时空间技术的急需。在建立过程中不可避免地存在不足，例如，在计算中使用的资料、数据既不广泛也不精确，处理方法还不够完善等。因此，应用DX-1转换参数所得的地心坐标，其相应坐标轴的指向没有明确的定义。据估计，1978地心坐标系的坐标分量中误差约为±10 m。

五、1988地心坐标系

从1979年起，有关部门在开展空间大地测量方面又做了大量的工作。如：1980年布设了全国37个点的多普勒网；1982年布测了卫星动力测地网，从而获得了全国范围稀疏的较高精

度地心坐标。与此同时，全国天文大地网整体平差工作完成，确定了约 5 万点的精密大地坐标，采用天文重力水准法求得了较高精度的全国地区的高程异常。在国际上，各种地心坐标系不断精化，出现了不少新的资料。凡此种种，为精化我国地心坐标转换参数创造了条件。

在多年准备的基础上，有关部门在 1987 年 5 月成立了 DX-2 数据综合处理领导小组。最后，于 1988 年底，完成了地心坐标转换参数 DX-2 的工作。

DX-2 转换参数是按 3 种方法建立地心坐标参数的综合结果。这 3 种方法是

(1)用 MX-1502 多普勒接收机测定子午卫星系统得到的地心坐标(全国 37 点多普勒网)；

(2)卫星动力测地得到的地心坐标(全国 7 个网点)；

(3)全球天文大地水准面差距法(均以 1980 国家大地坐标系为准)。

DX-2 有 7 个转换参数组成。利用 DX-2 转换参数可以将 1980 国家大地坐标系坐标或新 1954 北京坐标系坐标，化算成地心坐标系坐标，所对应的坐标系定名为 1988 地心坐标系。因此，地心二号有两套转换参数，即 $DX\text{-}2_{1954}$ 和 $DX\text{-}2_{1980}$，所得地心坐标结果完全相同。

1988 地心坐标系的原点是地球的质心，Z 轴指向国际协议原点 CIO(BIH 1968)，X 轴指向国际经度原点(BIH 1968)，Y 轴和 Z 轴、X 轴构成右手坐标系。长度单位为 m。用大地坐标形式表示时，椭球参数是 $a = 6\ 378\ 140$ m，$\alpha = 1 : 298.257$。

当将 1980 国家大地坐标系或新 1954 北京坐标系的空间直角坐标换算为 1988 地心坐标系的空间直角坐标时，其计算公式为

$$\left.\begin{aligned} X_D &= X(1+m) + Y \cdot \varepsilon''_Z/\rho'' - Z \cdot \varepsilon''_X/\rho'' + \Delta X_0 \\ Y_D &= Y(1+m) - X \cdot \varepsilon''_Z/\rho'' + Z \cdot \varepsilon''_X/\rho'' + \Delta Y_0 \\ Z_D &= Z(1+m) + X \cdot \varepsilon''_Y/\rho'' - Y \cdot \varepsilon''_X/\rho'' + \Delta Z_0 \end{aligned}\right\} \tag{7-40}$$

式中，X_D、Y_D、Z_D 表示 1988 地心坐标系中的坐标；X、Y、Z 分别表示 1980 国家大地坐标系或新 1954 北京坐标系中的坐标，对应的转换参数是 $DX\text{-}2_{1980}$ 或 $DX\text{-}2_{新1954}$。

据估计，由 DX-2 所得地心坐标任一分量中误差优于±5 m。

六、2000 国家大地坐标系

20 世纪 80 年代以后，在国家测绘局、总参测绘局、中国地震局和中国科学院等单位的共同努力下，我国先后建立了全国 GPS 一、二级网、GPS AB 级网、GPS 连续运行站网，建成了卫星定位服务系统以及中国地壳运动观测网络，开展了大规模地面网和空间网联合平差工作，这些成果标志着构建我国新的地心坐标系基本框架的技术条件已经成熟。

(一)2000 国家大地坐标系的定义

我国新一代国家大地坐标系为“2000 国家大地坐标系”，英译 China Geodetic Coordinate System 2000，缩写为 CGCS 2000。其定义与协议地球参考系的定义一致，即

(1)原点：包括海洋和大气的整个地球的质量中心；

(2)定向：初始定向由 1984.0 时 BIH(国际时间局)定向给定；

(3)定向时间演化：定向的时间演化使得地壳无整体旋转；

(4)长度单位：引力相对论意义下局部地球框架中的米。

CGCS 2000 的参考历元为 2000.0。

参考椭球采用 CGCS 2000 参考椭球，其定义常数是

长半轴：$a = 6\ 378\ 137$ m

地球(包括大气)引力常数：$GM = 3.986\ 004\ 418 \times 10^{14}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}$

扁率：$\alpha = 1/298.257\ 222\ 101$

地球自转角速度：$\omega = 7.292\ 115 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$

正常椭球与参考椭球一致。

需要说明以下几点：

(1)CGCS 2000 参考椭球的 4 个常数中，a、α、ω 三个常数是与 GRS 80 一致的，GM 是 IERS(国际地球自转服务)的推荐值，目前世界上其他地心椭球也多是如此。

(2)CGCS 2000 椭球的 a、α 值与 IERS 推荐的更精确值($a = 6\ 378\ 136.6$ m，$1/\alpha = 298.256\ 42$)有微小差异，但对实用目的不造成影响。

(3)CGCS 2000 椭球与 WGS 84 椭球的区别仅在其 α 值有微小差异(在赤道上仅差 1 mm)，可以认为两个椭球实际上是一致的。

(二)2000 国家大地坐标系的实现

CGCS 2000 由 3 个层次的站网坐标和速度具体实现。

第一层次——连续运行参考站。构成 CGCS 2000 的基本骨架，其坐标精度为 mm 级，速度精度为 1 mm/a。连续运行参考站还为静态、动态定位和导航提供坐标基准。

GPS 连续运行参考站(CORS)是长期连续跟踪接收 GPS 卫星信号的永久性地面观测站。利用数据通信和互联网技术，实时地向不同类型、不同需求、不同层次的用户自动地提供经过检验的 GPS 观测值(载波相位、伪距)、各种改正数、状态信息以及其他有关 GPS 服务项目。目前维持 2000 国家大地坐标系的基准站为 29 个，其坐标精度为毫米级。

第二层次——GPS 大地网。包括国家 GPS A、B 级网，全国 GPS 一、二级网以及中国地壳运动 GPS 观测网络工程，还有其他地壳形变 GPS 监测网中除了 CORS 站以外的所有站。其三维地心坐标精度为厘米级，速度精度为 2～3 mm/a。

国家 GPS A、B 级网由国家测绘局于 1991～1997 年组织观测。A 级网由 30 个主点和 22 个副点组成，B 级网由 818 个点组成。A、B 级网平差中采用的坐标框架为 ITRF 93，历元为 1996.365。平差后的点位地心坐标精度为 10^{-7} 量级。

全国 GPS 一、二级网由总参测绘局于 1991～1997 年实测，其中一级网 44 个点，二级网 534 个点。一、二级网平差采用的坐标框架为 ITRF 96，历元为 1997.0。平差后的点位地心坐标精度为 10^{-8} 量级。

中国地壳运动 GPS 观测网络工程由中国地震局、总参测绘局、中国科学院、国家测绘局于 1998～2002 年共同布测，包括基准网、基本网和区域网。其中基准网点 29 个，基本网点 56 个，区域网点 1 000 个。网络工程平差中采用的坐标框架为 ITRF 96，历元为 1998.680。平差后的点位地心坐标精度总体优于 10^{-8} 量级。

GPS 大地网和连续运行参考站共同构成 CGCS 2000 的框架。

第三层次——天文大地网。包括经空间网与地面网联合平差的约 5 万个天文大地点，其大地经纬度误差不超过 0.3 m，大地高误差不超过 0.5 m。

由于我国 GPS 大地网的密度远不如天文大地网，仅为后者的 1/20 左右，所以 GPS 大地网所提供的低密度的三维地心坐标框架不能完整地实现用于工程目的三维地心坐标系。国家测绘局和总参测绘局分别进行了我国天文大地网与 GPS 大地控制网观测数据的联合平差，获得了我国 48 919 个一二等天文大地网点的高精度地心坐标，其平均点位精度达到 ±0.11 m，

提高了全国天文大地网的精度和现势性，改善了 CGCS 2000 坐标框架的密度和分布。

(三)CGCS 2000 与 ITRF 的关系

从定义上看，CGCS 2000 与 ITRF 属同一坐标系。CGCS 2000 的坐标通过 GPS 相对定位技术确定，而基准站坐标属于 ITRF 框架，因此，CGCS 2000 与 ITRF 应属同一参考框架。通过合理的观测和计算，可以尽量使 CGCS 2000 与 ITRF 的一致性保持在 2 cm 以内。于是，CGCS 2000 相当于 ITRF 在中国的加密，在厘米量级上可忽略 CGCS 2000 与 ITRF 的差异。

(四)CGCS 2000 与现行参心坐标系的差异

1. 椭球定位方式不同

参心坐标系是通过多点定位，建立与局部区域的大地水准面最为密合的椭球而建立的坐标系。如 1980 西安坐标系，在全国范围内，参考椭球面和大地水准面符合很好，高程异常为零的两条等值线穿过我国东部和西部，大部分地区高程异常在 20 m 以内，它对距离的影响小于 1/30 万。CGCS 2000 是地心坐标系，是通过现代大地测量手段，按地球参考框架的建立技术实现的，它所定义的椭球中心与地球质心重合，且椭球定位与全球大地水准面最为密合。与全球大地水准面密合的椭球其与局部地区椭球的密合就不一定很好。

2. 实现技术不同

参心坐标系是通过经典大地测量技术建立的。CGCS 2000 是通过空间大地测量技术建立的。

3. 坐标系维数不同

参心坐标系为二维坐标系，而 CGCS 2000 为三维坐标系。

4. 坐标系原点不同

参心坐标系的原点与地球质量中心有较大偏差，而 CGCS 2000 原点位于地球质量中心。

5. 实现精度不同

参心坐标系缺乏高精度的外部控制，长距离精度较低。CGCS 2000 精度比现行参心坐标系精度提高了 10 倍，相对精度可达 $10^{-7}\sim10^{-8}$。

(五)启用 CGCS 2000 的影响及对策

大地坐标系是整个测绘工作的基础。改变坐标系涉及诸多方面，但最直接的影响还是旧坐标系下的测绘数据、成果和测绘产品的利用问题。这主要涉及以下几个方面：

(1)旧坐标系下的大地点成果(约 20 多万)；

(2)旧坐标系下的地形图、海图、航空图和地籍图；

(3)地方坐标系的成果(包括控制点坐标和地形图)；

(4)已建成的地理空间数据基础设施和地理信息系统；

(5)基于其他椭球的重力异常、高程异常和垂线偏差；

(6)特殊应用的测绘成果。

关于测量成果和测绘产品的过渡使用问题，需采取以下技术对策。

(1)实施空间网与地面网联合平差，将各等级大地网点严密纳入 CGCS 2000，没有条件进行联合平差的大地网点，通过精密坐标转换将其改算到 CGCS 2000。

(2)精确求定 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系及各地方坐标系到 CGCS 2000 的转换参数，并编制相应的坐标转换软件，提供公众使用。坐标转换精度指标分为以下三类：用于大众化导航应用的低精度转换，坐标分量中误差为 5～10 m；用于三维坐标相似变换的中精度转

换，坐标分量中误差为 0.5～5 m；用于地形图图廓线和坐标网转换的高精度转换，坐标分量中误差不超过 0.5 m。

(3)对已出版的旧坐标系下的纸质地图，可通过重新标注图廓线和方里网的方式改正到 CGCS 2000。计算表明：坐标系的更换对比例尺大于 1：100 万的地图，图上点的地理位置的改变值超过了制图精度，必须重新给予标记；各种比例尺地图一幅图内任意两点间的长度和方位变动在制图精度以内，可以忽略不计。因此，对于已有纸质地图的改化，只需将每幅图的图廓线和方里网作平移处理。

(4)对于数字地图，采用软件将各图层各要素的坐标进行坐标转换，然后重新进行分幅截幅处理。

(5)对基于其他椭球的重力异常，通过正常重力公式用软件改化为基于 2000 参考椭球的重力异常。类似地，将参考于其他椭球的高程异常和垂线偏差改化为参考于 CGCS 2000。

按我国现有的技术条件，通过周密计划和妥善实施，实现新老坐标系的平稳过渡是完全可行的。我国已于 2008 年 7 月 1 日起正式启用了 2000 国家大地坐标系(军事测绘已于 2007 年 8 月 1 日起启用了该坐标系)，按照规定，2000 国家大地坐标系与现行国家大地坐标系(指 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系)转换、衔接的过渡期为 8～10 年。

参考文献

程鹏飞，成英燕，文汉江，等. 2008. 2000国家大地坐标系实用宝典[M]. 北京：测绘出版社.

段定乾. 1996. 电子速测技术[M]. 北京：解放军出版社.

国家自然科学基金委. 1994. 大地测量学[M]. 北京：科学出版社.

焦文海. 2000. 地心大地坐标系与高程基准研究[D]. 郑州：解放军信息工程大学.

金标仁，申文斌，晁定波. 1994. 地球动力学参考系理论[M]. 武汉：武汉测绘科技大学出版社.

孔祥元，郭际明，刘宗泉. 2002. 大地测量学基础[M]. 武汉：武汉大学出版社.

孔祥元，梅是义. 2002. 控制测量学（上册，第二版）[M]. 武汉：武汉大学出版社.

李国藻，杨启和，胡定荃. 1991. 地图投影[M]. 北京：解放军出版社.

刘大杰，等. 1996. 全球定位系统（GPS）的原理与数据处理[M]. 上海：同济大学出版社.

陆仲连. 1996. 地球重力场理论与方法[M]. 北京：解放军出版社.

宁津生，刘经南，陈俊勇，等. 2006. 现代大地测量理论与技术[M]. 武汉：武汉大学出版社.

佩利年 Л. П. 〔苏〕. 1983. 大地测量学（理论大地测量学）[M]. 北京：测绘出版社.

石磐，史庆和. 跨入新世纪的重力基准——2000国家重力基本网[J]. 军事测绘，2001，4.

吴晓平，等. 2001. 军事测量工程[M]. 北京：解放军出版社.

夏一飞，黄天衣. 1995. 球面天文学[M]. 南京：南京大学出版社.

熊介. 1989. 椭球大地测量学[M]. 北京：解放军出版社.

徐绍铨，等. 1998. GPS测量原理及应用[M]. 武汉：武汉测绘科技大学出版社.

徐正杨，刘振华，吴国良. 1991. 大地控制测量学[M]. 北京：解放军出版社.

许其凤. 2001. 空间大地测量学[M]. 北京：解放军出版社.

总参测绘局. 2002. 2000国家重力基本网建立工作报告[R]. 北京：总参测绘局.

朱华统，黄继文. 1993. 椭球大地计算[M]. 北京：八一出版社.

Boucher C., Altamimi Z., Duhem L.. 1992. IERS Technical Note 12: ITRF91 and its associated velocity field [R]. Paris: Central Bureau of IERS.

Moritz H., Mueller I. I.. 1987. Earth Rotation: Theory and Observation[M]. New York: Ungar.

[General Information]
书名=大地测量学基础
作者=吕志平，乔书波编著
页数=210
SS号=12772054
DX号=
出版日期=2010.03
出版社=测绘出版社